詳細解答

STEP II 2022，第 7 題

純數學 • 複係數多項式的根

> **STEP II 2022，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

方程 $\mathrm{h}(w) = 0$ 可以很自然地寫成 $w^5(nw+1) = -(w+n)$，兩邊取模（modulus）後，就變成一個只關於 $|w|$ 的命題。一旦知道所有根都在單位圓（unit circle）上，每個非實根都會與它的共軛（conjugate）配成一對，而這個共軛恰好也是它的倒數（reciprocal）。由此便得到二次因式（quadratic factor），之後只需比較係數（comparing coefficients），再作一個正負號的論證即可。

解答

第 (i) 部分

(a) 把 $\mathrm{h}(w) = 0$ 的各項分組為

$$w^5(nw+1) = -(w+n).$$

兩個括號都不可能為零。若 $w = -1/n$，則 $\mathrm{h}(w) = n - \frac{1}{n} \neq 0$；若 $w = -n$，則 $\mathrm{h}(w) = n^5(n^2-1) \neq 0$，因為 $n \geq 2$。兩邊取模再平方，得

$$|w^5|^2\,|nw+1|^2 = |w+n|^2.$$

對任何複數 u 及實數 c，有 $|u+c|^2 = (u+c)(\bar{u}+c) = |u|^2 + 2c\,\mathrm{Re}(u) + c^2$。所以

$$|w+n|^2 = |w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + n^2 = \mathrm{f}(w),$$
$$|nw+1|^2 = n^2|w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + 1 = \mathrm{g}(w).$$

兩者皆為正，故 $|w^5|^2 = \mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)$。取正平方根，便得 $|w^5| = \sqrt{\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)}$，即為所求。

(b) 兩者相減時，$\mathrm{Re}(w)$ 項互相抵消：

$$\mathrm{f}(w) - \mathrm{g}(w) = n^2 + |w|^2 - n^2|w|^2 - 1 = (n^2-1)(1-|w|^2).$$

用反證法（proof by contradiction），假設 $|w| < 1$。由於 $n^2 - 1 > 0$，得 $\mathrm{f}(w) > \mathrm{g}(w) > 0$，所以 $\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w) > 1$。由 (a)，$|w|^5 > 1$，故 $|w| > 1$，與 $|w| < 1$ 矛盾。因此 $|w| \geq 1$。

(c) 同樣的論證反過來亦成立。若 $|w| > 1$，則 $\mathrm{f}(w) < \mathrm{g}(w)$，所以 $|w|^5 < 1$，即 $|w| < 1$，矛盾。故 $|w| \leq 1$ 亦成立，結合 (b)，得 $|w| = 1$。

想一想 有沒有更簡潔的理由說明 $|w| \leq 1$？

有的。係數 $n, 1, 0, 0, 0, 1, n$ 倒過來讀也一樣，所以 $z^6\,\mathrm{h}(1/z) = \mathrm{h}(z)$。因此若 w 是根，$1/w$ 也是根；把 (b) 應用於 $1/w$，便得 $|w| \leq 1$。

第 (ii) 部分

(a) 由於 h 是實係數（real coefficients）多項式，它的非實根必成共軛對出現。六個根互不相同且都不是實數，所以它們組成三對 w_k, $\bar{w}_k$ $(k = 1, 2, 3)$。由第 (i) 部分，$|w_k| = 1$，故 $w_k\bar{w}_k = 1$，而

$$(z - w_k)(z - \bar{w}_k) = z^2 - (w_k + \bar{w}_k)z + w_k\bar{w}_k = z^2 - a_k z + 1,$$

其中 $a_k = 2\,\mathrm{Re}(w_k)$ 為實數。多項式 h 的次數（degree）為 6，首項係數（leading coefficient）為 n，所以

$$\mathrm{h}(z) = n(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1)(z^2 - a_3 z + 1).$$

(b) 乘積中的 z^5 項，來自從其中一個因式取 $-a_k z$、從另外兩個因式各取 z^2，所以 z^5 的係數是 $-n(a_1 + a_2 + a_3)$。在 h 中這個係數是 1，所以

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{n}.$$

(c) 先把其中兩個因式相乘：

$$(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1) = z^4 - (a_1 + a_2)z^3 + (2 + a_1 a_2)z^2 - (a_1 + a_2)z + 1.$$

再乘以 $z^2 - a_3 z + 1$，z^3 項來自 $z^3 \times 1$、$z^2 \times (-a_3 z)$ 及 $z \times z^2$：

$$-(a_1 + a_2) - a_3(2 + a_1 a_2) - (a_1 + a_2) = -2(a_1 + a_2 + a_3) - a_1 a_2 a_3.$$

h 中沒有 z^3 項，所以 $a_1 a_2 a_3 = -2(a_1 + a_2 + a_3)$，再由 (b)，

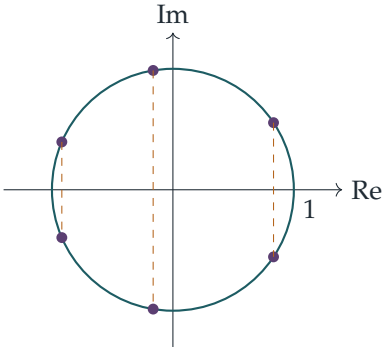
$$a_1 a_2 a_3 = \frac{2}{n}.$$

(d)

想一想 a_k 的正負號能告訴我們甚麼關於實部的資訊？

每對共軛根 $w_k, \bar{w}_k$ 有相同的實部（real part）$\mathrm{Re}(w_k) = a_k/2$。所以實部為負的根的數目，是負數 a_k 的數目的兩倍。

由於 $a_1a_2a_3 = 2/n > 0$，所有 a_k 都不為零，而且其中負數的個數是偶數：零個或兩個。它們不可能全部為正，因為 $a_1 + a_2 + a_3 = -1/n < 0$。所以恰好有兩個 a_k 為負、一個為正，六個根之中有**四個**的實部為負。



上圖顯示 $n = 2$ 的情況。六個根以三對共軛根的形式落在單位圓上，其中兩對位於虛軸（imaginary axis）的左邊。

驗算

- 作為「沒有實根」的合理性檢查：$\mathrm{h}(1) = 2n + 2$ 和 $\mathrm{h}(-1) = 2n - 2$ 都不為零。由於所有根都在單位圓上，唯一可能的實根只有 ± 1。
- 當 $n = 2$ 時，數值求解得 $a_k \approx -1.8368,\ -0.3272,\ 1.6640$。它們之和為 $-0.5 = -\frac{1}{2}$，乘積為 $1.000 = \frac{2}{2}$，且有兩個為負，與 (b)、(c)、(d) 相符。以電腦檢驗 $n = 2, \ldots, 29$，確認每次所有根的模都是 1，而且都有四個根的實部為負。

常見錯誤

- 未檢查 $w = -1/n$ 不是根，便直接除以 $nw + 1$。
- 在 (c) 中漏掉構成 z^3 的三種方式之一，特別是來自 $2 + a_1a_2$ 中常數 2 的那一項 $-2a_3$。
- 在 (d) 中數了負數 a_k 的個數，卻忘記每一個都對應兩個根。

STEP 之外

係數倒過來讀也一樣的多項式稱為迴文多項式（palindromic polynomial，又稱自倒多項式，self-reciprocal）。它的根以 $w, 1/w$ 成對出現，而代換 $u = z + 1/z$ 可以把它的次數減半。這裏的 $a_k = w_k + 1/w_k$ 正正就是這個 u。探討所有根何時都落在單位圓上的問題，會引出 Schur–Cohn 判別法，以及複分析（complex analysis）中的儒歇定理（Rouché's theorem）等結果。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是從幾何角度欣賞這些概念的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。