詳細解答

STEP II 2022，第 6 題

純數學 • 正交軌線

> **STEP II 2022，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

兩條曲線在某點互相垂直，當且僅當它們在該點的斜率（gradient）之積為 -1。因此，對於一整族曲線，我們需要一條在點 (x, y) 成立的斜率公式，而且無論族中哪一條曲線經過該點都適用。這意味着要在曲線方程與其導數（derivative）之間消去參數（parameter）（a、b、c 或 k），只剩下一條只含 x、y 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的微分方程（differential equation）。然後把斜率 m 換成 $-1/m$ 再求解，便得到與之垂直的曲線族。

解答

全題中 $x > 0$ 且 $y > 0$。

第 (i)(a) 部分

把 $x^2 + y^2 = 2ax$ 對 x 作隱函數微分（implicit differentiation），得

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a.$$

這式子仍然含有 a，而 a 隨曲線而變。由曲線方程得 $2a = (x^2 + y^2)/x$，代入後乘以 x，

$$2x^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - x^2,$$

即所求。

對於第二族，把 $x^2 + y^2 = 2by$ 微分（記住右方亦透過 y 依賴於 x），得

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

此時 $2b = (x^2+y^2)/y$；代入後乘以 y，

$$2xy + 2y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x^2+y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad\Longrightarrow\quad (x^2-y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy.$$

第 (i)(b) 部分

假設兩族中各有一條曲線經過 (x,y)，且 $y \neq x$。由於 $x, y > 0$，故 $2xy \neq 0$；又因 $y \neq x$ 且兩者皆為正，故 $x^2 - y^2 \neq 0$。因此兩條微分方程都可以相除：兩個斜率為

$$m_1 = \frac{y^2-x^2}{2xy}, \qquad m_2 = \frac{2xy}{x^2-y^2}, \qquad \text{故} \qquad m_1 m_2 = \frac{y^2-x^2}{x^2-y^2} = -1.$$

兩個斜率都是有限值，且乘積為 -1，所以兩條切線（tangent）互相垂直。

想一想 在直線 $y = x$ 上會出現甚麼問題？這是否表示結果在那裏不成立？

在 $y = x$ 上，第二條方程變成 $0 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x^2 \neq 0$，沒有任何有限斜率能滿足它：第二條曲線的切線是鉛垂的。出問題的是代數，而不是幾何，所以我們直接考察。

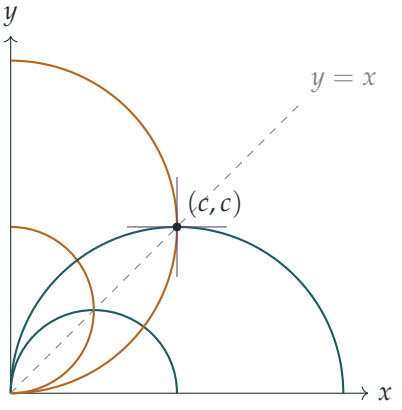
若 (c,c) 在 $x^2+y^2 = 2ax$ 上，則 $2c^2 = 2ac$，故 $a = c$；同理 $b = c$。第一條曲線是圓心 $(c,0)$、半徑 c 的圓，而 (c,c) 是它的最高點，所以該點的切線是水平的（事實上當 $y = x$ 時 $m_1 = 0$）：

$$y = c.$$

第二條曲線是圓心 $(0,c)$、半徑 c 的圓，而 (c,c) 是它的最右點，所以其切線是鉛垂的：

$$x = c.$$

水平線與鉛垂線互相垂直，所以**是的**：在每一個交點，包括 $y = x$ 上的交點，切線都互相垂直。



第一族的圓（青綠色）在原點與 y 軸相切；第二族的圓（琥珀色）在原點與 x 軸相切。

第 (ii) 部分

對於 $y = c\ln x$，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{c}{x}$。為了消去 c，注意在這類曲線上位於第一象限的點，$y > 0$ 迫使 $\ln x \neq 0$，故 $c = y/\ln x$，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x\ln x}.$$

這個斜率永不為零，所以經過同一點的垂直曲線的斜率必為 $-x\ln x/y$。因此第二族滿足

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x\ln x.$$

分離變數（separating variables），並以 $u = \ln x$、$\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$ 對 $x\ln x$ 作分部積分（integration by parts），

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\ln x\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2\ln x + \tfrac{1}{4}x^2 + C.$$

乘以 4，第二族為

$$2y^2 + 2x^2\ln x - x^2 = k,$$

每個常數 k 對應一條曲線（只計 $x > 0$、$y > 0$ 的部分）。反過來，對此式作隱函數微分，得 $4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4x\ln x + 2x - 2x = 0$，正是上面的方程，所以凡這些曲線與某條 $y = c\ln x$ 相交之處，斜率之積都是 $\frac{y}{x\ln x}\cdot\frac{-x\ln x}{y} = -1$。

第 (iii) 部分

把 $y^2 = 4k(x+k)$ 微分，得 $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4k$，由於 $y > 0$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2k}{y}.$$

想一想 這裏只有一族曲線。那麼「第二條曲線」從何而來？

固定第一象限中一點 (x, y)，問族中哪些曲線經過它。k 的值必須滿足

$$4k^2 + 4xk - y^2 = 0,$$

這是 k 的二次方程（quadratic）。其判別式（discriminant）$16x^2 + 16y^2$ 為正，所以有兩個相異實根 k_1、k_2，而它們的積為

$$k_1k_2 = -\frac{y^2}{4}.$$

（此值為負，所以兩根皆非零，符合曲線族的要求。）二次方程最多只有兩個根，所以若族中兩條不同的曲線在 (x, y) 相交，它們的參數必定正是 k_1 和 k_2。它們在該點的斜率為 $2k_1/y$ 和 $2k_2/y$，乘積為

$$\frac{4k_1k_2}{y^2} = \frac{4}{y^2}\cdot\left(-\frac{y^2}{4}\right) = -1.$$

所以在每一個這樣的點，切線都互相垂直，即所求。（這些曲線是焦點（focus）在原點的拋物線（parabola）；這族曲線就是它自己的正交軌線。）

驗算

- 在 (i) 中，取 $(x,y)=(1,2)$：則 $a=\frac{5}{2}$、$b=\frac{5}{4}$，斜率為 $m_1=\frac{3}{4}$ 和 $m_2=-\frac{4}{3}$，乘積為 -1。
- 在 (ii) 中，在 $(e,1)$ 處，對數曲線有 $c=1$，斜率為 $1/e$；第二族的公式給出斜率 $-e\cdot 1/1=-e$。乘積同樣是 -1。
- 在 (iii) 中，在 $(0,2)$ 處，二次方程為 $4k^2-4=0$，故 $k=\pm 1$：拋物線 $y^2=4(x+1)$ 和 $y^2=-4(x-1)$，在該點的斜率分別為 1 和 -1。
- 四個結果亦已用電腦在數千個隨機點上驗證，所用的是曲線本身的數值導數。

常見錯誤

- 微分 $2by$ 時漏掉右方的因子 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。
- 在 (ii) 中，把垂直斜率寫成 $-x/c$，然後在仍含 c 的情況下積分：c 屬於第一條曲線，必須在求解前消去。
- 在 (i)(b) 中除以 x^2-y^2 而沒有說明它為何非零，因而忽略了直線 $y=x$ 需要另行處理。

STEP 之外

處處以直角相交的曲線族稱為**正交軌線**（orthogonal trajectories）。它們在物理學中以場線和等勢線的形式出現，在複分析（complex analysis）中亦然：解析函數（analytic function）的實部與虛部的等高線總是互相垂直，這就是為甚麼 (i) 中的圓來自 $1/z$，而 (iii) 中自身正交的拋物線來自 $\sqrt{z}$。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）討論了正交軌線，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）則把複分析的圖像解釋得精彩動人。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。