詳細解答

STEP II 2022，第 5 題

純數學 • 三角形中的不等式

STEP II 2022，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

從 P 把三角形分成三塊，便可看出無論 P 怎樣移動，加權和(weighted sum)$ax+by+cz$ 始終固定為 2Δ。之後每一部分都是在這個單一線性約束（linear constraint）下的最優化（optimisation）問題。第 (i) 部分把 $x+y+z$ 與這個固定量作比較；(iii)(a) 的恆等式（identity）對 $x^2+y^2+z^2$ 做同樣的事（它其實是喬裝了的柯西－施瓦茨不等式(Cauchy–Schwarz inequality)）；至於最大值，我們把 (i) 反過來用，以 c 代替 a。

解答

第 (i) 部分

由於 $a>b$ 且 $y\geq 0$，得 $by\leq ay$；由於 $a>c$ 且 $z\geq 0$，得 $cz\leq az$。把兩式相加，再在兩邊加上 ax，得

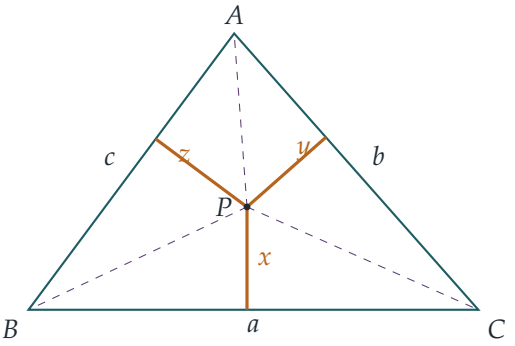
$$ax+by+cz\leq ax+ay+az=a(x+y+z),$$

此即所求。因為 $a-b>0$ 及 $a-c>0$，等號成立當且僅當 $(a-b)y+(a-c)z=0$，即 $y=z=0$。稍後我們會用到這個等號成立的情況。

第 (ii)(a) 部分

把 P 與各頂點連起來，便把 ABC 分成三角形 PBC、PCA 和 PAB（若 P 在某條邊上，其中一些可能是退化（degenerate）的）。三角形 PBC 的底為 $BC=a$，高為 x，其餘依此類推，所以

$$\Delta=\tfrac{1}{2}ax+\tfrac{1}{2}by+\tfrac{1}{2}cz,\qquad \text{即}\qquad ax+by+cz=2\Delta.$$



反過來，任何滿足 $ax+by+cz=2\Delta$ 的 $x,y,z\geq 0$，都恰好是三角形內（或邊上）唯一一點 P 到三邊的距離：三個三角形的面積 $\frac{1}{2}ax$、$\frac{1}{2}by$、$\frac{1}{2}cz$ 都非負，總和為 Δ，而它們唯一確定 P（它們就是 P 的面積坐標（areal coordinates））。因此，下文可以把問題當作純代數問題處理：在所有滿足 $ax+by+cz=2\Delta$ 的非負 x,y,z 中求最優值。

第 (ii)(b) 部分

依次用第 (i) 部分和 (ii)(a)，

$$x+y+z\geq \frac{ax+by+cz}{a}=\frac{2\Delta}{a}.$$

等號成立當且僅當 $y=z=0$，此時 $ax=2\Delta$。所以總和的最小值為

$$x+y+z=\frac{2\Delta}{a},\qquad \text{取得於}\quad x=\frac{2\Delta}{a},\ y=0,\ z=0.$$

從幾何角度看，$y=z=0$ 表示 P 同時在 CA 和 AB 上，所以 $P=A$，而 x 就是從 A 到最長邊 BC 的高（altitude）。

第 (iii)(a) 部分

展開三個差的平方，

$$\begin{aligned}(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2 &= b^2x^2+a^2y^2+c^2y^2+b^2z^2+a^2z^2+c^2x^2\\ &\quad -2(abxy+bcyz+cazx),\end{aligned}$$

而

$$(ax+by+cz)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(abxy+bcyz+cazx).$$

兩式相加，交叉項互相抵消，而 a^2,b^2,c^2 其中之一與 x^2,y^2,z^2 其中之一的每個乘積都恰好出現一次，得 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$。這就證明了此恆等式對所有實數值皆成立。

第 (iii)(b) 部分

把 $ax+by+cz=2\Delta$ 代入恆等式：

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2+4\Delta^2\geq 4\Delta^2,$$

因為平方數非負。因此

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

> **想一想** 下界只有在真正能取到時才是最小值。三個平方項能否在一個真實存在的點 P 同時為零？

等號成立需要 $bx=ay$、$cy=bz$ 及 $az=cx$。這些條件表示 (x,y,z) 是 (a,b,c) 的倍數：若 $x=\lambda a$，則 $y=\frac{b}{a}x=\lambda b$，$z=\frac{c}{a}x=\lambda c$，三條方程都成立。由約束條件得 $\lambda(a^2+b^2+c^2)=2\Delta$，所以 $\lambda=\dfrac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2}>0$。於是 x,y,z 全為正數，且滿足 $ax+by+cz=2\Delta$，故根據 (ii)(a) 的說明，它們對應一個真實的點 P（嚴格位於三角形內部）。所以平方和的最小值為

$$\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2},\qquad\text{取得於}\quad x=\frac{2a\Delta}{a^2+b^2+c^2},\ y=\frac{2b\Delta}{a^2+b^2+c^2},\ z=\frac{2c\Delta}{a^2+b^2+c^2}.$$

第 (iv) 部分

> **想一想** 第 (i) 部分用到 a 是最長邊。如果改用最短邊 c，會怎樣？

由於 $a>c$、$b>c$ 且 $x,y\geq 0$，把第 (i) 部分的論證反過來，得 $ax+by+cz\geq c(x+y+z)$，等號成立當且僅當 $x=y=0$。所以

$$x+y+z\leq\frac{2\Delta}{c}.$$

此外，由於 $x,y,z\geq 0$，

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\leq(x+y+z)^2,$$

等號成立當且僅當 $xy+yz+zx=0$。把兩者結合（由於兩邊都非負，平方是安全的），

$$x^2+y^2+z^2\leq(x+y+z)^2\leq\frac{4\Delta^2}{c^2}.$$

當 $x=y=0$ 時，兩個不等式都取等號：此時 $xy+yz+zx=0$ 且 $cz=2\Delta$。所以平方和的最大值為

$$\frac{4\Delta^2}{c^2},\qquad\text{取得於}\quad x=0,\ y=0,\ z=\frac{2\Delta}{c},$$

即 $P=C$，也就是最短邊所對的頂點。（第二個不等式只在 $x=y=0$ 時取等號，所以這是取得最大值的唯一一點。）

驗算

取邊長為 $a = 7$、$b = 6$、$c = 5$ 的銳角三角形。海倫公式（Heron's formula）給出 $\Delta = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6} \approx 14.70$。答案於是為：$x + y + z$ 的最小值是 $12\sqrt{6}/7 \approx 4.20$；$x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值是 $864/110 = 432/55 \approx 7.85$；最大值是 $864/25 = 34.56$。大小次序合理：在 $P = C$ 時，平方和就是從 C 出發的高的平方，即 $(12\sqrt{6}/5)^2 = 34.56$。我們用電腦檢驗了大量隨機銳角三角形，每個三角形取數以千計的隨機點 P，證實了 $ax + by + cz = 2\Delta$ 及全部三個界，而極值分別在 A、在距離與 (a, b, c) 成比例的點，以及在 C 取得。

常見錯誤

- 給出下界卻沒有證明它能取到。在 (iii)(b) 中，必須檢查等號成立的點的距離非負且滿足約束條件，才能確定它是一個真實存在的 P。
- 混淆頂點：$x + y + z$ 的最小值在 A（最長邊所對的頂點）取得，但 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最大值在 C（最短邊所對的頂點）取得。
- 在 (iv) 中忽略條件 $x, y, z \geq 0$；沒有這個條件，$x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2$ 並不成立。

STEP 之外

(iii)(a) 中的恆等式是拉格朗日恆等式（Lagrange's identity），它證明了三維空間中的柯西－施瓦茨不等式 $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$：最小值點就是 (x, y, z) 與 (a, b, c) 平行之處，亦即從原點到平面 $ax + by + cz = 2\Delta$ 的垂足。像 $x^2 + y^2 + z^2$ 這樣的凸函數（convex function）在三角形上的最大值總是在某個頂點取得，這讓我們初窺線性最優化與凸最優化的世界。(iii)(b) 中找到的點是三角形的類似重心（symmedian point，又稱勒穆瓦納點（Lemoine point））。想進一步了解點積與投影，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。