詳細解答

STEP II 2022，第 4 題

純數學 • 絕對值函數

> **STEP II 2022，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

絕對值符號（modulus sign）只在其內部式子變號之處才起作用，因此在每兩個這樣的點之間的區間上，每個絕對值都可以換成其內部式子的正號或負號形式。反過來看，一項 $A|x-p|$ 會在 $x=p$ 處造成一個轉角，該處的斜率（gradient）跳變 $2A$。因此，要寫出單一公式，我們先配合斜率的跳變（在最後一部分還要配合 x^2 係數（coefficient）的跳變），然後再定出常數。

解答

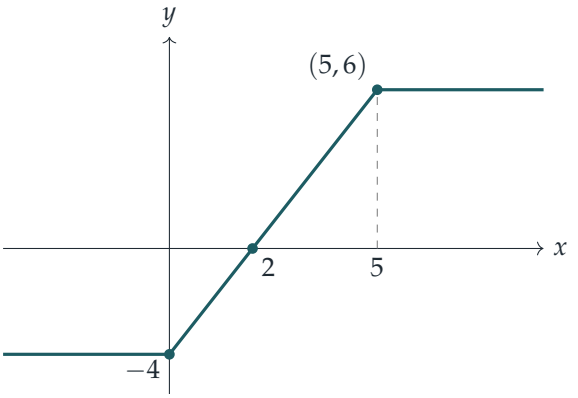
第 (i) 部分

臨界點是 $x=0$（$|x|$ 在此轉換）和 $x=5$（$|x-5|$ 在此轉換）。

- 當 $x \le 0$：$|x| = -x$，而由於 $x-5<0$，$|x-5| = 5-x$。所以 $\mathrm{f}(x) = -x-(5-x)+1 = -4$。
- 當 $0 \le x \le 5$：$|x| = x$ 及 $|x-5| = 5-x$。所以 $\mathrm{f}(x) = x-(5-x)+1 = 2x-4$。
- 當 $x \ge 5$：$|x| = x$ 及 $|x-5| = x-5$。所以 $\mathrm{f}(x) = x-(x-5)+1 = 6$。

在 $x=0$ 和 $x=5$ 處，相關的兩個表達式都成立（每個絕對值在該處要麼為零，要麼符號確定），所以重疊的端點是一致的：$-4 = 2(0)-4$ 及 $2(5)-4 = 6$。這就是所求的分段（piecewise）形式。

圖像先是高度為 -4 的水平線，然後以斜率 2 從 $(0,-4)$ 經 $(2,0)$ 上升至 $(5,6)$，之後是高度為 6 的水平線。



第 (ii) 部分

第 (i) 部分啟發我們嘗試

$$\mathrm{g}(x) = A|x| + B|x-5| + Cx + D.$$

由左至右經過 $x = 0$ 時，$A|x|$ 一項由 $-Ax$ 變為 Ax，所以斜率跳變 $2A$；同理，$B|x-5|$ 令斜率在 $x = 5$ 處跳變 $2B$。已知的 g 在三段上的斜率分別是 -1、3、1，所以

$$2A = 3 - (-1) = 4, \qquad 2B = 1 - 3 = -2,$$

得 $A = 2$、$B = -1$。當 $x \geq 5$ 時，公式為 $2x - (x-5) + Cx + D = (1+C)x + 5 + D$，而這必須等於 $x + 10$，所以 $C = 0$ 及 $D = 5$。因此

$$\boxed{\mathrm{g}(x) = 2|x| - |x-5| + 5.}$$

驗算其餘兩段：當 $x \leq 0$，$-2x - (5-x) + 5 = -x$；當 $0 \leq x \leq 5$，$2x - (5-x) + 5 = 3x$。兩者都與 g 的定義相符。

? **想一想** 為甚麼這種形式的公式有機會成功？

g 的每一段都是線性的，而且各段連續（continuous）地接合（在 $x = 0$ 處兩側都是 0，在 $x = 5$ 處兩側都是 15）。由線性式的絕對值之和加上一個線性函數所組成的函數，必定是連續且分段線性的，而轉角只出現在各絕對值轉換之處。假如 g 有跳躍，就沒有這樣的公式能產生它。

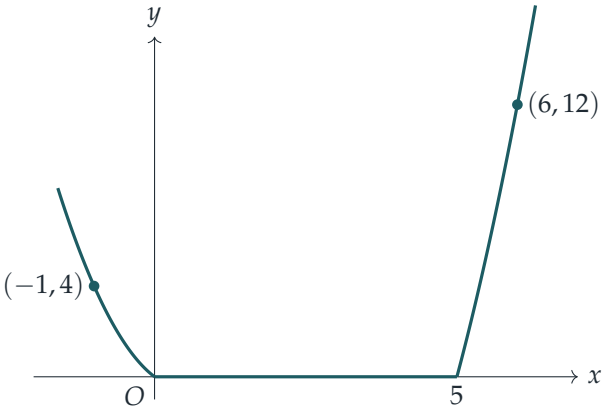
第 (iii) 部分

現在轉換點是 $x = 0$（對應 $|x|$）以及 $x(x-5)$ 的根，即同樣是 0 和 5。乘積 $x(x-5)$ 在 $x < 0$ 及 $x > 5$ 時為正，在兩者之間為負。

► 當 $x \leq 0$：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x + 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 2x = 2x(x-1)$。

- 當 $0 \le x \le 5$：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x - (x^2 - 5x) = 0$。
- 當 $x \ge 5$：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 10x = 2x(x-5)$。

所以 h 在 $[0,5]$ 上恆等於零。在左邊，它是拋物線（parabola）$y = 2x(x-1)$ 的一部分：它以斜率 $4x - 2 = -2$ 到達原點，並在 $x \to -\infty$ 時無界地增大（例如 $\mathrm{h}(-1) = 4$）。在右邊，它是 $y = 2x(x-5)$ 的一部分：它以斜率 $4x - 10 = 10$ 離開 $(5,0)$（例如 $\mathrm{h}(6) = 12$）。兩臂並非互為鏡像：右臂離開橫軸時陡峭五倍。圖像是連續的，在 $(0,0)$ 和 $(5,0)$ 處有轉角，而且處處 $\mathrm{h}(x) \ge 0$。



第 (iv) 部分

第 (iii) 部分展示了我們需要的工具：$|x(x-5)|$ 在 $[0,5]$ 以外等於 $x^2 - 5x$，在其內則等於 $-(x^2 - 5x)$，所以它可以把一個 x^2 項「開啟」和「關閉」。函數 k 的 x^2 係數在 $[0,5]$ 以外為 0，在其內為 2。在 $ax^2 + d|x(x-5)|$ 中，x^2 的係數在外面是 $a + d$，在裏面是 $a - d$，所以我們需要 $a + d = 0$ 及 $a - d = 2$，即 $a = 1$、$d = -1$。於是 $x^2 - |x(x-5)|$ 具有正確的二次項表現，而且

$$x^2 - |x(x-5)| = \begin{cases} 5x & x \le 0 \text{ 或} x \ge 5, \\ 2x^2 - 5x & 0 \le x \le 5. \end{cases}$$

從 k 減去此式，剩下一個分段線性的餘下部分：

$$\mathrm{k}(x) - \left(x^2 - |x(x-5)|\right) = \begin{cases} 5x & x \le 5, \\ 50 - 5x & x \ge 5. \end{cases}$$

它只在 $x = 5$ 處有一個轉角，該處斜率由 5 跳變為 -5，即跳變 -10；所以它是 $-5|x-5|$ + (線性函數)。當 $x \le 5$ 時，$-5|x-5| = 5x - 25$，所以要加上 25 才得到 $5x$。這啟發我們得出

$$\boxed{\mathrm{k}(x) = x^2 - |x(x-5)| - 5|x-5| + 25.}$$

驗證。我們在每個區間上代入。

- 當 $x \le 0$：$x(x-5) \ge 0$ 且 $x-5 < 0$，所以公式給出 $x^2 - (x^2-5x) - 5(5-x) + 25 = 5x + 5x = 10x$。
- 當 $0 \le x \le 5$：$x(x-5) \le 0$ 且 $x-5 \le 0$，所以它給出 $x^2 + (x^2-5x) - 5(5-x) + 25 = 2x^2$。
- 當 $x \ge 5$：$x(x-5) \ge 0$ 且 $x-5 \ge 0$，所以它給出 $x^2 - (x^2-5x) - 5(x-5) + 25 = 50$。

這些正正就是 k 的三段，所以該公式對每個實數 x 都正確。

這個單一公式並非唯一。例如 $|x(x-5)| = |x|\,|x-5|$，所以答案可以改寫，而其他組合（例如用到 $x|x|$ 的）也同樣可行。任何答案只要通過上述三個區間的檢驗，都是可以接受的。

驗算

- 代入數值：由定義及 $2(2) - 7 + 5$ 均得 $\mathrm{g}(-2) = 2$；$\mathrm{g}(7) = 17 = 14 - 2 + 5$。至於 k：$\mathrm{k}(3) = 18$ 而 $9 - |-6| - 10 + 25 = 18$；$\mathrm{k}(-1) = -10$ 而 $1 - 6 - 30 + 25 = -10$。
- 連續性是一個快捷的合理性檢查：任何由絕對值構成的單一公式都是連續的，而 g 和 k 在接合點確實吻合（$\mathrm{k}(5) = 50 = 2 \cdot 5^2$）。
- 四條公式都已用電腦在 $[-20, 25]$ 中 10^5 個隨機點上與其分段形式比較，結果在捨入誤差範圍內一致。

常見錯誤

- 把 h 的兩臂畫成對稱。左臂是 $2x(x-1)$，右臂是 $2x(x-5)$，在轉角處的斜率分別是 -2 和 10。
- 忘記 $|x(x-5)|$ 在兩個點變號，所以在 (iii) 中它在中間的區間翻轉，而不只是在 0 處。
- 寫出 k 的公式後沒有代入全部三個區間驗證；驗證是必需的。

STEP 之外

這裏追蹤斜率跳變的做法，讓我們初嘗一個一般事實：$\mathbb{R}$ 上每個只有有限個轉角的連續分段線性函數，都是一個線性函數加上若干 $|x-p|$ 項的組合。這正是數值分析（numer-

ical analysis）中線性樣條（linear splines）以及神經網絡（neural networks）中「ReLU」單元背後的概念，因為 $\max(x,0) = \frac{1}{2}(x+|x|)$。若想仔細了解連續性及分段定義的函數，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。