詳細解答

STEP II 2022，第 3 題

純數學 • 斐波那契級數與小數

STEP II 2022，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

遞推關係（recurrence）$F_{r+1} - F_r - F_{r-1} = 0$ 是整道題的核心。把它乘以 $\frac{1}{10}$ 的冪再求和，然後重新編排下標（re-indexing），每一部分都會變成 S_n 的倍數加上幾個邊界項，這正是生成函數（generating function）的技巧。第 (i) 部分是安全網：它說明斐波那契數（Fibonacci numbers）的增長不會快過 2 的冪，所以除以 10（或 100）的冪之後，尾項（tail）非常小，很容易估計上界。

解答

第 (i) 部分

首先，每個 $F_k \geq 0$（用歸納法（induction）證明：因為 $F_0, F_1 \geq 0$，而非負數之和仍是非負數）。其次，這個數列從不遞減：$F_1 \geq F_0$，而對 $k \geq 1$，有 $F_{k+1} - F_k = F_{k-1} \geq 0$。

所以對每個 $k \geq 1$，

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \leq F_k + F_k = 2F_k.$$

現在固定 $n \geq 1$，對 $r \geq n$ 進行歸納。當 $r = n$ 時，命題變成 $F_n \leq F_n$。若對某個 $r \geq n$ 有 $F_r \leq 2^{r-n}F_n$，則由於 $r \geq 1$，

$$F_{r+1} \leq 2F_r \leq 2 \cdot 2^{r-n}F_n = 2^{(r+1)-n}F_n.$$

歸納完成，所以只要 $n \geq 1$ 且 $r \geq n$，便有 $F_r \leq 2^{r-n}F_n$。

第 (ii) 部分

我們把左邊三個和各自用 S_n 表示。

第一個和。設 $k = r+1$：

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r+1}}{10^{r-1}} = 100 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{F_k}{10^k} = 100\Big(S_n - \frac{F_1}{10} + \frac{F_{n+1}}{10^{n+1}}\Big)$$
$$= 100S_n - 10F_1 + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}.$$

第二個和。這就是 $10S_n$。

第三個和。設 $k = r-1$：

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r-1}}{10^{r-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k}{10^k} = F_0 + S_n - \frac{F_n}{10^n}.$$

從第一個和減去第二和第三個和，得

$$(100 - 10 - 1)S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} = 89S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}},$$

這就是所求的結果。

第 (iii) 部分

把 (ii) 左邊的三個和合併成一個。它的第 r 項是 $(F_{r+1} - F_r - F_{r-1})/10^{r-1} = 0$，所以左邊等於零。代入 $F_0 = 0$ 和 $F_1 = 1$，得

$$89S_n = 10 - \frac{F_n}{10^n} - \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}. \qquad (*)$$

? **想一想** 我們怎樣知道當 $n \to \infty$ 時，剩下的兩項會趨於零？

這正是第 (i) 部分發揮作用的地方。在那裏取 $n = 1$，得對所有 $r \geq 1$ 都有 $F_r \leq 2^{r-1}$，所以

$$0 \leq \frac{F_n}{10^n} \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5}\Big)^n, \qquad 0 \leq \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} \leq \frac{2^n}{10^{n-1}} = 10\Big(\frac{1}{5}\Big)^n,$$

而兩個上界都趨於 0。在 $(*)$ 中令 $n \to \infty$，得 $89S_n \to 10$，即

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} = \frac{10}{89}.$$

至於尾項，在第 (i) 部分中取 $n = 7$（注意 $F_7 = 13$）：對 $r \geq 7$，有 $F_r \leq 2^{r-7} \cdot 13$，所以

$$\sum_{r=7}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} \leq \frac{13}{10^7} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{10^j} = \frac{13}{10^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{65}{4} \times 10^{-7} = 1.625 \times 10^{-6} < 2 \times 10^{-6}.$$

$\frac{1}{89}$ 的各位數字。首六項之和為

$$S_6 = 0.1 + 0.01 + 0.002 + 0.0003 + 0.00005 + 0.000008 = 0.112358.$$

尾項 $T = \frac{10}{89} - S_6$ 嚴格大於零（因為它的各項都是正數），而且小於 2×10^{-6}，所以

$$0.112358 < \frac{10}{89} < 0.112360, \qquad \text{因此} \qquad 0.0112358 < \frac{1}{89} < 0.0112360.$$

嚴格介於這兩個界之間的每個數都以 $0.011235\ldots$ 開頭，所以 $\frac{1}{89}$ 小數點後的首六位數字是 $0, 1, 1, 2, 3, 5$。嚴格的下界很重要：它排除了展開式是 $0.0112357\ldots$ 的可能。

第 (iv) 部分

把目標數在開頭的 00 之後兩位兩位地讀：

$$0.00\ 01\ 01\ 02\ 03\ 05\ 08\ 13\ 21\ 34\ 55\ldots$$

這些兩位數組正是 $F_1, F_2, \ldots, F_{10}$，每個都寫成兩位數字。所以這個數應該是 $\frac{1}{100}U$，其中

$$U = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{100^r}.$$

求 U 的和。由第 (i) 部分得 $F_r \le 2^{r-1}$，所以這個級數絕對收斂（converges absolutely）。因此我們可以像 (ii) 一樣，逐項平移和合併收斂級數：

$$U - \frac{U}{100} - \frac{U}{100^2} = \frac{F_1}{100} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{F_r - F_{r-1} - F_{r-2}}{100^r} = \frac{1}{100}.$$

這裏 $r = 1$ 的項是 $F_1/100$（因為 $F_0 = 0$），而之後每個括號都等於零。所以 $U \cdot \frac{9899}{10000} = \frac{1}{100}$，得 $U = \frac{100}{9899}$。因此候選答案是

$$\frac{U}{100} = \frac{1}{9899},$$

其中 $r = 1$、$s = 9899$，兩者都是小於 10000 的正整數。

驗證各位數字。設 U_{10} 為首十項之和。由於 $F_1, \ldots, F_{10}$ 每個都小於 100，各項不會互相重疊，而且

$$U_{10} = 0.01010203050813213455$$

恰好成立，共有 20 位小數。由第 (i) 部分取 $n = 11$（且 $F_{11} = 89$），餘下各項滿足

$$0 < U - U_{10} \le \frac{89}{100^{11}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{100}\right)^j = \frac{89}{10^{22}} \cdot \frac{100}{98} < 10^{-20}.$$

所以 $U_{10} < U < U_{10} + 10^{-20}$，$U$ 的首 20 位小數就是 U_{10} 的那些數字。除以 100 會把這些數字向右移兩位：

$$\frac{1}{9899} = 0.0001010203050813213455\ldots,$$

這正是所要求的開頭。

驗算

- 用長除法（long division）得 $1/89 = 0.011235955\ldots$。數字 011235 吻合，而接下來的數字 9,5,5 顯示斐波那契數一旦達到兩位數，就會互相「進位」。
- (iii) 中 $r = 6$ 之後的尾項實際上是 $10/89 - 0.112358 \approx 1.55 \times 10^{-6}$，穩穩低於我們的上界 1.625×10^{-6}。
- 用電腦把 $1/9899$ 計算到 22 位小數，得 0.0001010203050813213455。下一組兩位數是 90 而不是 $F_{11} = 89$，因為 $F_{12} = 144$ 超出了它的兩位數位置，向前一組進位 1。

常見錯誤

- 在 (ii) 重新編排下標時把邊界項弄錯。把每個平移後的和的首項和末項寫出來，就可以避免。
- 在 (iii) 中沒有證明 $F_n/10^n$ 和 $F_{n+1}/10^{n-1}$ 趨於零。第 (i) 部分正是為此而設的。
- 忘記尾項是嚴格大於零的。單靠一個上界並不能確定第六位數字。

STEP 之外

函數 $G(x) = \sum F_r x^r$ 是斐波那契數的*生成函數*，而上面的平移論證說明，當 $|x| < \frac{1}{2}$ 時 $G(x) = x/(1 - x - x^2)$。代入 $x = \frac{1}{10}$ 和 $x = \frac{1}{100}$，便得到 $\frac{10}{89}$ 和 $\frac{100}{9899}$。生成函數把遞推關係轉化為代數運算，是組合數學（combinatorics）的核心工具。Herbert Wilf 的 *generatingfunctionology*（《生成函數學》）是一本生動的入門書。要嚴格地處理「重新排列收斂級數」，屬於大學一年級分析（analysis）課程的內容：可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。