詳細解答

STEP II 2022，第 2 題

純數學 • 遞推關係

> **STEP II 2022，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

把關係式兩邊乘以 2，它就變成一個關於二階差分（second differences）的陳述：$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$。在 (i) 中它等於零，所以一階差分（first differences）是常數，數列（sequence）是線性的。在 (ii) 和 (iii) 中，二階差分是一個給定的常數或一個給定的 n 的線性函數，所以技巧是減去一個恰好具有該二階差分的多項式（polynomial），剩下的便是 (i) 中那類數列。

解答

第 (i) 部分

把關係式加倍並移項，對所有 $n \geq 1$ 得

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n.$$

所以每個差分都等於前一個差分，由歸納法（induction）可知每個差分都等於第一個差分 $d = u_2 - u_1$。這就是相鄰兩項之間的固定差。

把 $n - 1$ 個這樣的差分加起來，

$$u_n = u_1 + (n-1)d = dn + (u_1 - d),$$

若 $d \neq 0$，這是 n 的 1 次多項式；若 $d = 0$，則是 0 次多項式（即常數）。無論哪種情況，次數（degree）都不超過 1。

第 (ii) 部分

設 $v_n = t_n + pn^2$。由於

$$\tfrac{1}{2}(p(n+2)^2 + pn^2) = p(n^2+2n+2) = p(n+1)^2 + p,$$

v_n 的關係式變成

$$t_{n+1} + p(n+1)^2 = \tfrac{1}{2}(t_{n+2} + t_n) + p(n+1)^2 + p - p,$$

即對所有 $n \geq 1$，有 $t_{n+1} = \frac{1}{2}(t_{n+2} + t_n)$。由第 (i) 部分，存在常數 A 和 B 使得 $t_n = A + Bn$，所以

$$v_n = pn^2 + Bn + A.$$

因為 $p \neq 0$，n^2 項不會消失，所以 v_n 的次數恰好是 2。

由 $v_1 = v_2 = 0$：

$$p + B + A = 0, \qquad 4p + 2B + A = 0.$$

兩式相減得 $3p + B = 0$，所以 $B = -3p$，從而 $A = 2p$。因此

$$v_n = p(n^2 - 3n + 2) = p(n-1)(n-2).$$

第 (iii) 部分

這次題目沒有提示代換，所以我們要自己找一個。把關係式加倍，

$$w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 2(an + b).$$

? **想一想** 哪一個 n 的多項式，其二階差分是 n 的線性函數？

每取一次差分，多項式的次數就降一，所以我們需要一個三次多項式（cubic）。記 $\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$。直接展開得

$$\Delta^2 n^3 = (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) - 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n^3 = 6n + 6,$$
$$\Delta^2 n^2 = (n^2 + 4n + 4) - 2(n^2 + 2n + 1) + n^2 = 2.$$

所以 $\Delta^2(cn^3 + en^2) = 6cn + 6c + 2e$，而當

$$c = \frac{a}{3}, \qquad e = b - 3c = b - a.$$

時，它對每個 n 都等於 $2an + 2b$。現在設 $w_n = t_n + \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2$。由於 Δ^2 是線性的，$\Delta^2 w_n = \Delta^2 t_n + 2(an + b)$，於是關係式變成 $\Delta^2 t_n = 0$，這正是第 (i) 部分的關係式。所以 $t_n = A + Bn$，且

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + Bn + A.$$

因為 $a \neq 0$，三次項存在，所以 w_n 的次數是 3。

由 $w_1 = w_2 = 0$：

$$\tfrac{a}{3} + (b-a) + B + A = 0,$$
$$\tfrac{8a}{3} + 4(b-a) + 2B + A = 0.$$

第二式減去第一式得 $\frac{7a}{3} + 3(b-a) + B = 0$，所以 $B = \frac{2a}{3} - 3b$，再由第一式得 $A = 2b$。因此

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + \Big(\frac{2a}{3} - 3b\Big)n + 2b.$$

由於 $w_1 = w_2 = 0$，因式 $n-1$ 和 $n-2$ 必定出現，再比較 n^3 項和常數項，便得到較簡潔的形式

$$w_n = \frac{(n-1)(n-2)(an+3b)}{3}.$$

（展開 $(n-1)(n-2)(an+3b)$ 得 $an^3 + (3b-3a)n^2 + (2a-9b)n + 6b$，與上式一致。）

驗算

- 在 (iii) 中設 $a = 0$、$b = p$ 應該得回 (ii)，結果的確如此：$(n-1)(n-2)\cdot 3p/3 = p(n-1)(n-2)$。
- 直接運行遞推關係（recurrence）。取 $a = 3$、$b = 0$，有 $w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n + 6n$，所以由 $w_1 = w_2 = 0$ 得 $w_3 = 6$、$w_4 = 24$、$w_5 = 60$。公式給出 $(n-1)(n-2)n$，即 $6, 24, 60$。
- 次數為 3 的數列，其三階差分是常數。對 $0, 0, 6, 24, 60$，差分是 $0, 6, 18, 36$，然後是 $6, 12, 18$，再然後是 $6, 6$：是常數，等於 $2a$。

常見錯誤

- 說 (i) 中的數列次數恰好是 1：若 $u_1 = u_2$，它是常數。
- 在 (iii) 中只嘗試 $w_n = t_n + kn^3$。單靠 n^3 項會產生 $6kn + 6k$，所以還需要一個 n^2 項來調整常數。
- 忘記由 $p \neq 0$（或 $a \neq 0$）去證明「次數恰好是 2」（或 3）。

STEP 之外

這是解 $y'' = f(x)$ 的離散類比（discrete analogue）：通解（general solution）等於一個特解（particular solution）加上齊次方程（homogeneous equation）的解，而這裏齊次

方程的解就是線性數列 $A + Bn$。同樣的「餘函數（complementary function）加特解」結構支配着線性微分方程（linear differential equations），而猜測多項式特解的方法幾乎可以原封不動地搬過去。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）講述了連續的版本。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。