詳細解答

STEP II 2022，第 11 題

概率與統計 • 期望損失的最優化

STEP II 2022，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

按那 T 枝被測試的記憶棒的情況來劃分事件。只要其中任何一枝受感染，就不會有任何東西放上網絡，損失為零；只有當全部 T 枝都乾淨時，網絡上的那場賭博才會出現。把期望損失（expected loss）寫成 q 的函數，(ii) 就變成單變量的最大化（maximisation）問題；而比較相鄰的 T 值（用差分（difference）而不是導數（derivative），因為 T 是整數）則可處理 (iii)。

解答

全文中，損失為 $-x$ 即表示獲利 £x。設 L 為以英鎊計的淨損失。各記憶棒是否受感染互相獨立（independent），每枝乾淨的概率（probability）為 q，所以任何指定的 m 枝記憶棒全部乾淨的概率是 q^m。由對稱性（symmetry）可知，選哪 T 枝來測試並不重要。

第 (i) 部分

先考慮 $T > 0$。共有三種結果。

- 某枝被測試的記憶棒受感染（概率為 $1 - q^T$）：其餘的全被銷毀，沒有任何記憶棒被使用，$L = 0$。
- 全部 T 枝被測試的記憶棒都乾淨，但其餘 $N - T$ 枝中至少有一枝受感染（概率為 $q^T(1 - q^{N-T})$）：我們要支付消毒費用，所以 $L = D$。
- 全部 N 枝記憶棒都乾淨（概率為 $q^T q^{N-T} = q^N$）：被使用的 $N - T$ 枝每枝賺 £1，所以 $L = -(N - T)$。

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(L) &= D\,q^T\left(1-q^{N-T}\right) - (N-T)\,q^N \\ &= D\,q^T - (N-T+D)\,q^N.\end{aligned}$$

當 $T=0$ 時，全部 N 枝記憶棒都被使用：$L=D$ 的概率為 $1-q^N$，$L=-N$ 的概率為 q^N，得 $D-(N+D)q^N$。這正是同一公式取 $T=0$ 的結果，所以對每個 $0\le T<N$，

$$\mathrm{E}(L) = D\,q^T - (N-T+D)\,q^N.$$

第 (ii) 部分

α 的界。由於 $D>0$、$T\ge 0$ 及 $N-T>0$，分子和分母分別滿足 $DT\ge 0$ 及 $N(N-T+D)>0$，所以 $\alpha\ge 0$。此外

$$N(N-T+D)-DT = N(N-T)+D(N-T) = (N-T)(N+D) > 0,$$

所以 $DT<N(N-T+D)$，即 $\alpha<1$。

最大值。固定 N、D、T，對 $0\le q\le 1$ 記 $f(q)=Dq^T-(N-T+D)q^N$。

若 $T=0$，則 $\alpha=0$ 且 $f(q)=D-(N+D)q^N$，它隨 q 遞減，所以最大值出現在 $q=0$，即 $q^N=0=\alpha$ 之處。

若 $T\ge 1$，求導：

$$f'(q) = DTq^{T-1} - N(N-T+D)q^{N-1} = N(N-T+D)\,q^{T-1}\left(\alpha - q^{N-T}\right).$$

> **想一想** 我們怎樣知道這個駐點（stationary point）是極大點，而且是整個區間上的最大值？

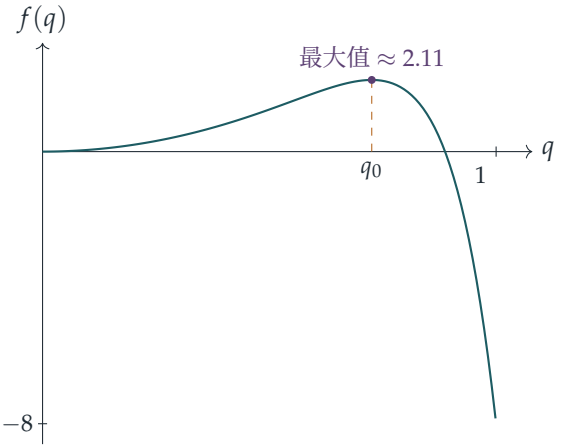
當 $0<q\le 1$ 時，因子 $N(N-T+D)q^{T-1}$ 是正數。因為 $N-T\ge 1$，q^{N-T} 由 0 嚴格遞增（strictly increasing）至 1，而 $0<\alpha<1$，所以恰好有一個 $q_0\in(0,1)$ 使 $q_0^{N-T}=\alpha$。當 $q<q_0$ 時 $f'(q)>0$，當 $q>q_0$ 時 $f'(q)<0$。所以 f 在 q_0 之前上升，之後下降：它在 $[0,1]$ 上的最大值出現在 $q^{N-T}=\alpha$ 之處，得證。

最大值是多少。在 q_0 處有 $q_0^{N-T}=\alpha$，所以 $q_0=\alpha^{1/(N-T)}$ 及 $q_0^T=\alpha^{T/(N-T)}=\alpha^k$。於是

$$\begin{aligned}f(q_0) &= q_0^T\left(D-(N-T+D)\,q_0^{N-T}\right) = \alpha^k\left(D-(N-T+D)\cdot\frac{DT}{N(N-T+D)}\right) \\ &= \alpha^k\left(D-\frac{DT}{N}\right) = \frac{D(N-T)\,\alpha^k}{N}.\end{aligned}$$

所以最大的期望淨損失是 $£\,D(N-T)\alpha^k/N$。（當 $T=0$ 時，這就是 $£D$；若取 $\alpha^0=1$，便與 $f(0)=D$ 吻合。）

下圖顯示 $N=10$、$T=2$、$D=5$ 時的 f，此時 $\alpha=\frac{1}{13}$。



第 (iii) 部分

現在固定 N、D 和 q，並記 $E_T = Dq^T - (N - T + D)q^N$。由於 T 只取整數值，「隨 T 遞增」的意思是對 $0 \le T \le N - 2$ 有 $E_{T+1} > E_T$。相減得

$$\begin{aligned} E_{T+1} - E_T &= Dq^{T+1} - Dq^T + q^N \\ &= q^T\left(q^{N-T} - Dp\right), \end{aligned}$$

這裏用了 $q - 1 = -p$。

> **想一想** 括號內的式子與 T 有關。怎樣才能找到一個 β 同時適用於所有 T？

因為 $0 < q \le 1$ 及 $N - T \le N$，我們有 $q^{N-T} \ge q^N$，所以只須令 $q^N > Dp$ 便足夠，而這個條件與 T 無關。由伯努利（Bernoulli）不等式（用簡單的歸納法（induction）即可證明：若 $(1-p)^n \ge 1 - np$，則 $(1-p)^{n+1} \ge (1-np)(1-p) = 1 - (n+1)p + np^2$），

$$q^N = (1-p)^N \ge 1 - Np.$$

所以若 $1 - Np > Dp$，即 $p < \dfrac{1}{N+D}$，則 $q^{N-T} \ge q^N \ge 1 - Np > Dp$，而且 $q^T > 0$。因此，取

$$\beta = \frac{1}{N+D} > 0,$$

每個 $p < \beta$ 都使所有 T 均有 $E_{T+1} > E_T$，所以期望損失是 T 的遞增函數。

對這樣的 p，$E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}$ 中最小的是 E_0。所以當 p 足夠小時，最佳策略是 $T = 0$：甚麼都不測試，使用全部 N 枝記憶棒。這是合理的：如果感染很罕見，測試大多只會銷毀本來可以賺錢的好記憶棒。

驗算

- 取 $N = 1$、$T = 0$，公式給出 $D - (1 + D)q$：以概率 p 損失 D，以概率 q 獲利 1，與預期相符。
- $q = 1$（完全沒有感染）給出 $D - (N - T + D) = -(N - T)$，即必定獲利 $N - T$。
- 取 $N = 10$、$T = 2$、$D = 5$：$\alpha = \frac{1}{13}$，$k = \frac{1}{4}$，最大值為 $4 \cdot 13^{-1/4} \approx 2.107$，與上圖的峯值吻合。我們亦用電腦列出 $N \leq 7$ 時所有感染情況，驗證了第 (i) 部分的公式。
- 取 $N = 10$、$D = 5$、$p = 0.3$（遠大於 $\beta = \frac{1}{15}$），期望損失其實隨 T 遞減，由 $T = 0$ 時約 4.58 降至 $T = 9$ 時的 0.03：可見對 p 確實需要加上某種條件。

常見錯誤

- 遺漏「某枝被測試的記憶棒受感染」這個結果：它對期望值的貢獻是 0，但仍然佔去 $1 - q^T$ 的概率。
- 把獲利算成 $£N$ 而不是 $£(N - T)$：即使被測試的記憶棒是乾淨的，它們也會被銷毀。
- 在 (iii) 中不加說明就對整數 T 求導，或選取了與 T 有關的 β。

STEP 之外

這是統計決策理論（statistical decision theory）中的一個小問題：當某個參數（p）未知時，選擇一個行動（這裏是 T）以使期望損失最小。第 (ii) 部分體現了極小化極大（minimax）的思想：它為每個策略找出在所有可能的 p 之下的最壞情況，這正是謹慎的管理者可能會拿來比較的東西。測試成本與漏檢缺陷成本之間的同一種取捨，也是驗收抽樣（acceptance sampling）和羣組檢測（group testing）背後的原理。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率導論》）是建立本題所用期望值工具的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。