詳細解答

STEP II 2022，第 10 題

力學 • 斜面上的拋體

STEP II 2022，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分是標準的軌跡方程（trajectory equation），竅門在於利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，把它看成關於 $\tan\alpha$ 的二次方程（*quadratic*）。目標點能夠被擊中，當且僅當這個二次方程有實根，於是整道題便化為一個判別式（discriminant）條件。用水平坐標 (x, y) 寫出來，這個條件原來描述的是一個圓盤（disc），而之後每一部分都只是讀出一條直線與一個圓的相交位置。

解答

全題我們把拋射體（projectile）視為只受重力作用而自由運動的質點（particle），不計空氣阻力（air resistance），並取 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。

第 (i) 部分

以發射點為基準量度水平距離和高度。在時間 t，

$$s = ut\cos\alpha, \qquad h = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

由水平運動得 $t = \dfrac{s}{u\cos\alpha}$，代入後得

$$h = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2\cos^2\alpha},$$

即為所求。

第 (ii) 部分

設 $P = (x, y, y\tan\theta)$，並記 $s = \sqrt{x^2+y^2}$ 為它與大炮的水平距離。由於大炮可以指向任何方向，我們把它瞄準在經過 P 的鉛垂平面內；運動便在該平面內進行，而由第 (i) 部分，我們需要一個角 α（可以是負數，因為大炮可以向下指），使得

$$y\tan\theta = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2}(1+\tan^2\alpha).$$

若 $s=0$，則 P 就是原點，垂直向上發射便可到達；而由於 $\sec^2\theta > \tan^2\theta$，下面的不等式在該點亦成立。對於 $s>0$，設 $T=\tan\alpha$，它可以是任何實數。條件是

$$\frac{gs^2}{2u^2}\,T^2 - s\,T + \left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) = 0$$

有實根 T，即它的判別式非負：

$$s^2 \geq 4\cdot\frac{gs^2}{2u^2}\left(y\tan\theta+\frac{gs^2}{2u^2}\right) \iff u^4 \geq 2gu^2 y\tan\theta + g^2s^2,$$

這是除以 $s^2>0$ 再乘以 u^4 的結果。除以 g^2 並利用 $s^2 = x^2+y^2$，

$$x^2 + y^2 + \frac{2u^2\tan\theta}{g}\,y \leq \frac{u^4}{g^2}.$$

對 y 配方（completing the square），並利用 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$，

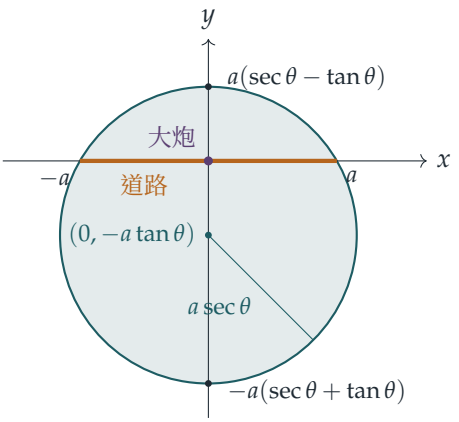
$$x^2 + \left(y + \frac{u^2\tan\theta}{g}\right)^2 \leq \frac{u^4}{g^2}(1+\tan^2\theta) = \frac{u^4\sec^2\theta}{g^2},$$

這正是所求的條件。

想一想 拋射體會不會在到達 P 之前就撞上斜坡地面？

不會。在發射所在的鉛垂平面內，拋射體的高度減去地面的高度，是關於水平距離的二次式，首項係數為負（拋物線減去一條直線），而它在大炮處和 P 處均為零。所以它在兩者之間為正：拋射體一直保持在地面之上，直至落在 P。

由此起記 $a = u^2/g$。可到達的點，就是其水平投影位於以 $(0, -a\tan\theta)$ 為圓心、$a\sec\theta$ 為半徑的圓盤內的那些點。



上圖（以 $\theta = 30°$ 繪製）顯示從上方俯視的可到達區域；「沿斜面向上」就是 y 的正方向。

第 (iii) 部分

沿斜面正上方即 $x = 0$、$y > 0$。條件變成 $(y + a\tan\theta)^2 \le a^2\sec^2\theta$，而由於 $y + a\tan\theta > 0$，這就是

$$y \le a(\sec\theta - \tan\theta).$$

斜面上水平坐標為 y 的點，沿斜面量度與原點的距離是 $y\sec\theta$。所以沿斜面向上最遠的點，距離為

$$a\sec\theta(\sec\theta - \tan\theta) = a\,\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta} = a\,\frac{1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\theta)},$$

即為所求。

沿斜面正下方即 $x = 0$、$y < 0$。此時條件給出 $y \ge -a(\sec\theta + \tan\theta)$，所以沿斜面向下最遠的點與大炮的距離為

$$a\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta) = a\,\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{u^2}{g(1-\sin\theta)}$$

第 (iv) 部分

道路是直線 $y = 0$（它位於斜面上，高度為 0）。在條件中代入 $y = 0$，得

$$x^2 \le a^2\sec^2\theta - a^2\tan^2\theta = a^2,$$

所以可到達的道路是 $-a \le x \le a$，長度為 $\dfrac{2u^2}{g}$，與在水平地面上相同。

現在把大炮放在 $(0, c, c\tan\theta)$。它與道路（即 x 軸）的距離是 $\sqrt{c^2 + c^2\tan^2\theta} = |c|\sec\theta$，所以 $r = |c|\sec\theta$。第 (ii) 部分的一切只取決於相對於大炮的位置，而從斜面上任何一點

看，斜面都是一樣的，因此我們可以沿用該條件，只需把 y 換成 $y-c$。道路（$y=0$）上可到達的部分滿足

$$x^2 \leq a^2\sec^2\theta - (a\tan\theta - c)^2.$$

> **想一想** 大炮應該放在道路上方還是下方？

可到達的長度是 $2\sqrt{a^2\sec^2\theta-(a\tan\theta-c)^2}$，當被減去的平方項為零，即 $c = a\tan\theta > 0$ 時最大。所以大炮應放在道路上方的斜面上，距離恰好使道路穿過可到達圓盤的圓心，此時道路截出一條直徑。最佳距離是

$$r = a\tan\theta\sec\theta = \frac{u^2\sin\theta}{g\cos^2\theta},$$

而道路的最大長度就是圓盤的直徑，

$$2a\sec\theta = \frac{2u^2}{g\cos\theta}.$$

驗算

- 取 $\theta = 0$（水平地面），第 (ii) 部分變成 $x^2+y^2 \leq (u^2/g)^2$，即熟悉的各方向最大射程 u^2/g；(iii) 的兩個答案都化為 u^2/g，而 (iv) 中 $r=0$，長度為 $2u^2/g$。
- 沿斜面向上的答案 $u^2/\big(g(1+\sin\theta)\big)$ 正是斜面（inclined plane）上向上發射的標準最大射程，這是圓盤正確的好跡象。
- 取 $u = 12\ \mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $\theta = 0.5\ \mathrm{rad}$，用電腦掃描所有發射角，得出沿斜面向上的最大射程為 9.932 m，向下為 28.226 m，與 $u^2/\big(g(1\pm\sin\theta)\big)$ 吻合；移動大炮後的最佳道路長度為 $33.49\ \mathrm{m} = 2u^2/(g\cos\theta)$。

常見錯誤

- 把 (x,y) 當作沿斜面量度的距離。它們是水平坐標，所以沿斜面向上的距離是 $y\sec\theta$，而不是 y。
- 忘記大炮可以指向水平線以下：$\tan\alpha$ 可取所有實數，正因如此，判別式條件就是問題的全部。
- 把移動後的大炮放在道路下方。圓盤的圓心在大炮的斜坡下方，所以大炮必須位於道路上方。

STEP 之外

第 (ii) 部分的圓盤，是所有可能軌跡的包絡（*envelope*）——「安全拋物面」（paraboloid of safety）$z = \frac{u^2}{2g} - \frac{g(x^2+y^2)}{2u^2}$——的一個截面；用任何平面與這個拋物面相交，都會得到一條圓錐曲線（conic），在這裏其投影是一個圓。曲線族的包絡，在大學一年級的力學和微分方程（differential equations）課程中都是很自然的課題。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）是一個好去處，可以看到以這種幾何上的細緻手法處理拋射體問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。