詳細解答

STEP II 2022，第 1 題

純數學 • 分部積分法

> **STEP II 2022，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

關鍵思路

每一部分都建基於同一招：分部積分（integration by parts）會產生第二個積分，而這個積分恰好抵消（或幾乎抵消）你手上已有的某一項。在 (i) 和 (ii) 中，這意味着要看出被積函數（integrand）是某個乘積的導數（derivative）。在 (iii) 中，同一招顯示兩個積分之差只不過是 e^x/x 在上下限之間的變化，於是 (a) 的草圖便能完成其餘的工作。

解答

第 (i) 部分

對第一項進行分部積分，取 $u = \sqrt{1+x^3}$ 及 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1$，於是 $v = x$ 及 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$：

$$\begin{aligned}\int 2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= 2x\sqrt{1+x^3} - 2\int x\cdot\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2x\sqrt{1+x^3} - \int \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

最後的積分正是被積函數的第二項，所以把它加上去便會將其抵消：

$$\int\left(2\sqrt{1+x^3} + \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\right)\mathrm{d}x = 2x\sqrt{1+x^3} + c.$$

用乘積法則（product rule）對 $2x\sqrt{1+x^3}$ 求導，會得回 $2\sqrt{1+x^3} + \dfrac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}$，由此印證結果。

第 (ii) 部分

把被積函數拆成 $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$。兩部分各自都沒有初等原函數（elementary antiderivative）（第一部分就是著名的 Si 被積函數），所以它們必須合併處理，正如 (i) 一樣。對第二部分進行分部積分，取 $u = \sin x$ 及 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2x^{-3}$，於是 $v = -x^{-2}$：

$$\int \frac{2\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} + \int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

接着對 $\dfrac{\cos x}{x^2}$ 進行分部積分，取 $u = \cos x$ 及 $v = -x^{-1}$：

$$\int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 與第一部分互相抵消，剩下

$$\int (x^2+2)\frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} + c = -\frac{\sin x + x\cos x}{x^2} + c.$$

驗證一下：對 $-\dfrac{\sin x}{x^2}$ 求導得 $-\dfrac{\cos x}{x^2} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$，對 $-\dfrac{\cos x}{x}$ 求導得 $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\cos x}{x^2}$；$\cos x/x^2$ 項互相抵消，總和正是被積函數。

第 (iii)(a) 部分

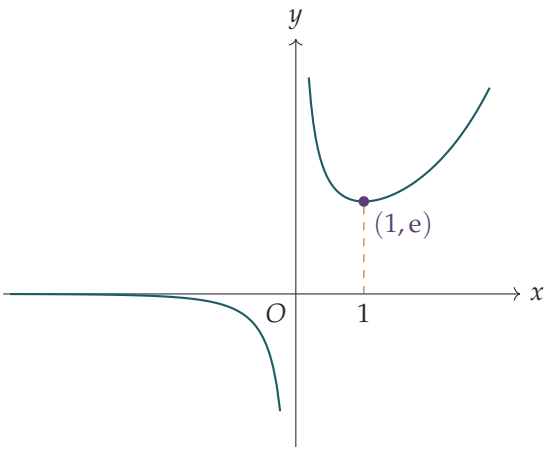
設 $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，定義域為 $x \neq 0$。由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}.$$

它只在 $x = 1$ 時為零，所以唯一的駐點（stationary point）是 $(1, \mathrm{e})$。當 $x < 1$（$x \neq 0$）時導數為負，當 $x > 1$ 時導數為正，所以 $(1, \mathrm{e})$ 是極小點（minimum）。

圖像其餘的形狀：

- 當 $x < 0$ 時，$y < 0$ 且 y 遞減。當 $x \to -\infty$ 時，$y \to 0^-$（指數函數佔上風），所以負 x 軸是一條漸近線（asymptote）。當 $x \to 0^-$ 時，$y \to -\infty$。
- 當 $x > 0$ 時，$y > 0$。當 $x \to 0^+$ 時，$y \to +\infty$；y 下降至 $x = 1$ 處的極小值 e，然後增加至 $+\infty$，增長速度比任何多項式都快。
- y 軸是一條垂直漸近線，而曲線與兩條坐標軸都不相交。



第 (iii)(b) 部分

對 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ 進行分部積分，取 $u = \mathrm{e}^x$ 及 $v = -x^{-1}$：

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^x}{x} + \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{所以} \qquad \int \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + c.$$

（等價地，$\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$ 正是我們在 (a) 中求得的導數。）

想一想 在 a 與 $2a$ 之間積分，究竟是否合理？

兩個被積函數在 $x = 0$ 處都趨向無窮，而在 0 附近 e^x/x^2 的積分發散，所以積分區間必須避開 0。這要求 $a \neq 0$；這樣 a 與 $2a$ 同號，0 永遠不會在兩者之間，積分便是有限的。

兩個積分相等，當且僅當它們的差為零：

$$\left[\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right]_a^{2a} = \frac{\mathrm{e}^{2a}}{2a} - \frac{\mathrm{e}^a}{a} = \frac{\mathrm{e}^a}{2a}(\mathrm{e}^a - 2) = 0.$$

由於 $\mathrm{e}^a/(2a) \neq 0$，我們需要 $\mathrm{e}^a = 2$，所以

$$a = \ln 2.$$

第 (iii)(c) 部分

與 (b) 完全一樣，對於整數 $m \neq n$，兩個積分要是有限的，0 就不能落在 m 與 n 之間的閉區間內，所以 m 和 n 均非零且同號。它們的差是

$$\int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n}{n} - \frac{\mathrm{e}^m}{m},$$

所以我們需要兩個同號的相異整數，使 $f(x) = \mathrm{e}^x/x$ 在該兩處取相同的值。換句話說，一條水平線必須在兩個整數 x 值處與 (a) 的圖像相交。

想一想 $x > 0$ 部分的曲線並非一一對應（one-to-one），因為它先下降再回升。那麼，為何兩個正整數不能給出相同的高度？

因為轉向點（turning point）位於 $x = 1$，而 1 本身就是最小的正整數。逐一考慮各情況：

- 兩者皆負。由 (a) 可知，f 在 $x < 0$ 上嚴格遞減（strictly decreasing），所以 $m \neq n$ 推出 $f(m) \neq f(n)$。
- 兩者皆正。這時 $m, n \geq 1$，而當 $x > 1$ 時 $f'(x) > 0$，所以 f 在 $[1, \infty)$ 上嚴格遞增。同樣地，$m \neq n$ 推出 $f(m) \neq f(n)$。

一條水平線可以與正數分支相交兩次，但這時兩個交點之一必定位於 $0 < x < 1$，而該範圍內沒有整數。所以沒有任何一對相異整數符合要求，因此這是不可能的，得證。

驗算

- 對於 (i)，在 $x = 1$ 處原函數的值為 $2\sqrt{2}$，而積分在 $[0, 1]$ 上的數值為 2.8284…，兩者吻合。
- 對於 (ii)，積分在 $[1, 10]$ 上的數值為 1.4711…，與 $-(\sin x + x \cos x)/x^2$ 的變化相同。
- 對於 (iii)(b)，取 $a = \ln 2$ 時兩個積分都約為 1.9224。另請注意 $f(\ln 2) = 2/\ln 2 = f(2 \ln 2)$：兩個積分限位於極小點兩側的同一高度，正如草圖所示必然如此。
- 對於 (iii)(c)，任何兩個整數最接近的情況是 $f(1) = \mathrm{e} \approx 2.718$ 對 $f(2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \approx 3.695$。

常見錯誤

- 在 (b) 和 (c) 中，忘記包含 0 的區間會令積分失去意義，因而看不出為何 m 和 n 必須同號。
- 在 (c) 中，不加限制地斷言「f 是一一對應的」：事實並非如此（例如 $f(\ln 2) = f(2 \ln 2)$）。論證需要用到位於 $x = 1$ 的轉向點。

STEP 之外

第 (i) 和 (ii) 部分是這樣的例子：被積函數的兩部分各自都沒有初等原函數，但它們的和卻有。微分代數（differential algebra）中的劉維爾定理（Liouville's theorem）精確刻

畫了哪些函數具有初等原函數；e^x/x、$\sin x/x$ 和 $\sqrt{1+x^3}$ 都沒有，這正是抵消之所以關鍵的原因。第 (iii)(c) 部分是一個單射性（injectivity）論證，而分析課程會把這類關於單調性（monotonicity）和中值定理（mean value theorem）的推理嚴格化；可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。