詳細解答

STEP III 2021，第 9 題

力學 • 斜碰撞與恢復係數

STEP III 2021，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

幾何部分是在兩個角落三角形 CPQ 和 BRP 中各用一次正弦定理（sine rule）；把兩式相乘時，QR 離 CB 的共同高度會互相抵消。至於反彈，光滑（smooth）的牆會保留沿牆方向的速度分量，並把垂直於牆的分量乘以 e，因此路徑在反彈前後與牆所成的角滿足 $\tan(\text{反彈後}) = e\tan(\text{反彈前})$。每次反彈各給出第一個結果中的一個括號。

解答

幾何恆等式

設 h 為直線 QR 與 BC 的距離。由於 $QR \parallel CB$，三角形 AQR 是等邊三角形，所以 $CQ = BR = h/\sin 60^\circ = 2h/\sqrt{3}$。

在三角形 CPQ 中，C 處的角是 60°，P 處的角是 θ，所以 Q 處的角是 $120^\circ - \theta$。由正弦定理得

$$\frac{CP}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{CQ}{\sin\theta} \quad\Longrightarrow\quad (a-x)\sin\theta = \frac{2h}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\right).$$

兩邊除以 $\sin\theta$（因 $0 < \theta < 180^\circ$，故非零）並整理，得

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{\sqrt{3}\,(a-x)}{h}.$$

在三角形 BRP 中，B 處的角是 60°，R 處的角是 ϕ，P 處的角是 $120^\circ - \phi$。由正弦定理得

$$\frac{BP}{\sin\phi} = \frac{BR}{\sin(120^\circ - \phi)} \quad\Longrightarrow\quad x\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi + \tfrac{1}{2}\sin\phi\right) = \frac{2h}{\sqrt{3}}\sin\phi,$$

因此

$$\sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{4h}{\sqrt{3}\,x}.$$

把兩個結果相乘，h 和 $\sqrt{3}$ 都抵消掉：

$$(\sqrt{3}\cot\phi + 1)(\sqrt{3}\cot\theta + 1) = \frac{4(a-x)}{x},$$

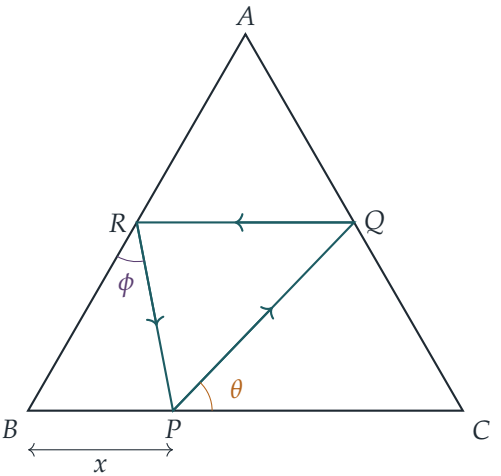
兩邊乘以 x 即得所求的恆等式。

反彈

把球視為在光滑桌面上運動的質點，因此它在兩次碰撞之間沿直線行進；框架亦是光滑的，所以每次碰撞只產生垂直於牆的衝量（impulse）。設球以速率 u、與牆成角 α 撞向牆，並以速率 v、與牆成角 β 離開。沿牆的分量不變，垂直於牆的分量則反向並乘以 e：

$$v\cos\beta = u\cos\alpha, \qquad v\sin\beta = eu\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \tan\beta = e\tan\alpha.$$

球沿牆的運動方向亦保持不變，所以從該方向量度時，α 和 β 都是銳角。（我們需要 $e > 0$，否則第一次碰撞後球便會沿着牆滑行。）



在 Q 點。球沿 PQ 到達，與牆 CA 成角 $\angle PQC = 120^\circ - \theta$，朝 A 方向移動。它沿 QR 離開，與牆成角 $\angle AQR = 60^\circ$（因 $QR \parallel CB$，兩者為同位角（corresponding angles））。所以

$$\tan 60^\circ = e\tan(120^\circ - \theta).$$

利用差角公式及 $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$，再把分子分母同乘以 $\cot\theta$，得

$$\tan(120^\circ - \theta) = \frac{-\sqrt{3} - \tan\theta}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} = \frac{\sqrt{3}\cot\theta + 1}{\sqrt{3} - \cot\theta}.$$

記 $c = \sqrt{3}\cot\theta$。反彈條件 $\sqrt{3}(\sqrt{3} - \cot\theta) = e(\sqrt{3}\cot\theta + 1)$ 變成 $3 - c = e(c+1)$，即 $4 - (c+1) = e(c+1)$，所以

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{4}{1+e}.$$

在 R 點。球沿 QR 到達，與牆 AB 成角 $\angle ARQ = 60°$，朝 B 方向移動，然後沿 RP 離開，所成角為 $\angle BRP = \phi$。所以

$$\tan\phi = e\tan 60° = \sqrt{3}e, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}, \qquad \sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{1+e}{e}.$$

求 x。把兩個括號代入恆等式，

$$\frac{1+e}{e}\cdot\frac{4}{1+e}\cdot x = 4(a-x) \quad \Longrightarrow \quad x = e(a-x) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{ae}{1+e},$$

正如所求。

再繞一圈

想一想 在 P 點必須發生甚麼，球才會再一次沿 PQ 出發？

球沿 RP 到達 P。在三角形 BRP 中，這條路徑與 BC 成角 $\angle RPB = 120° - \phi$，所以只有當這個角是銳角時，球到達時才是朝 C 方向移動。要重走 PQ，球必須以與 PC 成角 θ 離開，因此我們需要

$$\tan\theta = e\tan(120° - \phi).$$

由在 Q 點的計算，$\sqrt{3}\cot\theta = \frac{4}{1+e} - 1 = \frac{3-e}{1+e}$，所以 $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e}$，此值為正：$PQ$ 確實是朝 C 那一側前進。

把在 Q 點用過的同一公式中的 θ 換成 ϕ，並用 $\sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}$，得

$$\tan(120° - \phi) = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\cot\phi + 1)}{3 - \sqrt{3}\cot\phi} = \frac{\sqrt{3}\,(1+e)/e}{(3e-1)/e} = \frac{\sqrt{3}(1+e)}{3e-1}.$$

若 $e \le \frac{1}{3}$，則 $120° - \phi \ge 90°$，所以碰撞後球會垂直離開 BC，或折返朝 B 方向移動。這樣它便不可能沿着向 C 傾斜的 PQ 前進。所以 $e > \frac{1}{3}$，而條件變為

$$\frac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e} = \frac{\sqrt{3}\,e(1+e)}{3e-1} \quad \Longleftrightarrow \quad 3e - 1 = 3e - e^2 \quad \Longleftrightarrow \quad e^2 = 1.$$

由於 $e > 0$，得 $e = 1$，正如所求。球的速率在每次碰撞時都會改變（除非 $e = 1$），但速率在這裏毫不相干：重要的只是方向。

驗算

- 當 $e = 1$：$x = \frac{a}{2}$ 且 $\tan\theta = \tan\phi = \sqrt{3}$，所以 $\theta = \phi = 60°$，而 PQR 是連接各邊中點的三角形。由對稱性，這是一條閉合的完全彈性軌道，與預期相符。
- 取 $a = 1$、$e = \frac{1}{2}$：$x = \frac{1}{3}$ 且 $\theta \approx 46.10°$。用電腦逐步模擬球經過三次碰撞，它會準確地回到 P。下一次碰撞後，它以與 BC 約成 $68.95°$ 的角離開，而不是 $46.10°$，所以不會再繞 PQR 一圈。
- 當 $e \to 0$，$x \to 0$：P 滑向角落 B。這與球在每道牆上幾乎失去全部垂直於牆的速度相吻合。

常見錯誤

- 把 e 乘到整個速度上，或乘到沿牆的分量上。只有垂直於光滑牆的分量會改變。
- 從法線量度入射角，卻使用 $\tan\beta = e\tan\alpha$；這條式只適用於從牆量度的角。若從法線量度，定律應為 $\cot\beta = e\cot\alpha$。
- 在最後一部分，忘記 $120° - \phi$ 可能是鈍角，或忘記必須捨去 $e = -1$。

STEP 之外

球在一個區域內反彈的路徑，是*數學撞球*（mathematical billiards）的研究對象。當 $e = 1$ 時，連接各邊中點的三角形就是法尼亞諾（Fagnano）軌道。在任何銳角三角形中，這條軌道連接三條高的垂足，而且它是周長最短的內接三角形（inscribed triangle）。當 $e < 1$ 時，每次反彈都會使路徑向牆壓平；正如我們在這裏發現的，球無法重複一條閉合路線。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對衝量和碰撞有仔細的討論。至於撞球問題本身，Tabachnikov 的 *Geometry and Billiards*（《幾何與撞球》）是很好的下一步。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。