詳細解答

STEP III 2021，第 8 題

純數學 • 遞推關係與極限

STEP III 2021，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 2.8 節平方再減二中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/squaring-minus-two.html

關鍵思路

一切都建基於把遞推關係（recurrence）因式分解（factorise）。兩邊減去 2，得 $x_{n+1} - 2 = (x_n - 2)(x_n + 2)$，所以一旦各項都大於 2，它們與 2 的距離在每一步都會被乘以一個大於 4 的數。由此得到第 (i) 部分，第 (ii) 部分亦隨之而來。至於第 (iii) 部分，從 x_{n+1}^2 減去 4 同樣可以漂亮地因式分解，而正正是這一點令乘積 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 可以逐項相消（telescope）。

解答

第 (i) 部分

我們對 n 使用數學歸納法（induction）。當 $n = 1$ 時，命題變成 $x_1 \geq 2 + 4^0(a-2) = a$，這是成立的，而且取等號（注意 $4^0 = 1$）。

假設對某個 $n \geq 1$ 有 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$。由於 $a > 2$，右方大於 2，所以 $x_n > 2$。於是

$$x_{n+1} - 2 = x_n^2 - 4 = (x_n - 2)(x_n + 2).$$

這裏 $x_n - 2 > 0$ 而且 $x_n + 2 > 4$，所以 $(x_n - 2)(x_n + 2) \geq 4(x_n - 2)$。利用歸納假設（inductive hypothesis）$x_n - 2 \geq 4^{n-1}(a-2)$，

$$x_{n+1} - 2 \geq 4(x_n - 2) \geq 4 \cdot 4^{n-1}(a-2) = 4^n(a-2),$$

這正是 $n+1$ 時的命題。由歸納法，對所有 $n \geq 1$ 都有 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$。

我們從來沒有把不等式平方。把 $x_n \geq$ (界) 兩邊平方，只有在兩邊都非負時才成立，而因式分解的形式完全避開了這個顧慮。

第 (ii) 部分

若 $|a| > 2$。此時 $x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$。數列（sequence）$x_2, x_3, \ldots$ 服從同一個遞推關係，而且首項大於 2，所以以 x_2 代替 a（把下標平移一位）應用第 (i) 部分，得

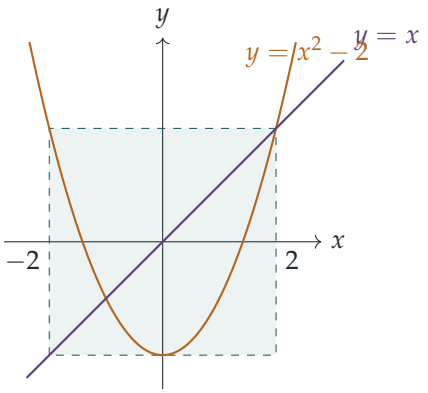
$$x_n \geq 2 + 4^{n-2}(x_2 - 2) \qquad (n \geq 2).$$

由於 $x_2 - 2 > 0$ 而且 $4^{n-2} \to \infty$，得 $x_n \to \infty$。

若 $|a| \leq 2$。我們用歸納法證明對每個 n 都有 $-2 \leq x_n \leq 2$。這在 $n = 1$ 時成立。若 $-2 \leq x_n \leq 2$，則 $0 \leq x_n^2 \leq 4$，所以 $-2 \leq x_n^2 - 2 \leq 2$，即 $-2 \leq x_{n+1} \leq 2$。因此這個數列有界（bounded），不可能趨向無限大。

> ? **想一想** 在 $|a| \leq 2$ 的情況下，只證明對所有 n 都有 $x_n \leq 2$ 足夠嗎？

不足夠。單有上界並不夠，因為若某一項小於 -2，它的平方便會大於 4，於是下一項就會大於 2。這就是為甚麼歸納過程必須同時帶着兩個界。圖像說明了為何這樣可行：拋物線（parabola）$y = x^2 - 2$ 把區間 $[-2, 2]$ 映射到它自身上。



綜合兩種情況，$x_n \to \infty$ 當且僅當 $|a| > 2$。

第 (iii) 部分

推動這部分一切的因式分解是

$$x_{n+1}^2 - 4 = (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^4 - 4x_n^2 = x_n^2\,(x_n^2 - 4).$$

由於 $a > 2$，第 (i) 部分給出對所有 n 都有 $x_n > 2$，所以 $x_n > 0$ 而且 $x_n^2 - 4 > 0$。取正平方根，

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4}.$$

重複應用這個關係（嚴格來說，是對 n 用歸納法），

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4} = x_n x_{n-1} \sqrt{x_{n-1}^2 - 4} = \cdots = x_1 x_2 \cdots x_n \sqrt{a^2 - 4}.$$

因此，對每個 $n \geq 1$，

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}\, x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}},$$

與 y_n 的定義比較，可見所求的公式對所有 n 成立，當且僅當 $A = \sqrt{a^2 - 4}$。

求 a。 $A = \sqrt{a^2 - 4}$ 這個值是必然的。在 $n = 1$ 時，所求的公式變成 $Aa/x_2 = a\sqrt{a^2 - 4}/x_2$，由於 $a > 0$ 而且 $x_2 > 0$，得 $A = \sqrt{a^2 - 4}$。反過來，在 $a > 2$ 之下 $A = \sqrt{a^2 - 4}$ 表示 $A^2 = a^2 - 4$，所以

$$a = \sqrt{A^2 + 4}.$$

這個值確實滿足 $a > 2$，因為 $A > 0$ 給出 $A^2 + 4 > 4$。取這個 a，便有 $\sqrt{a^2 - 4} = A$，而上面列出的恆等式（identity）就變成對所有 $n \geq 1$ 都有 $y_n = \sqrt{x_{n+1}^2 - 4} \,/\, x_{n+1}$，正如所求。

收斂性。 取這個 a 值，由於 $x_{n+1} > 0$，

$$y_n = \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \sqrt{1 - \frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

由於 $a > 2$，第 (ii) 部分給出 $x_{n+1} \to \infty$，所以 $4/x_{n+1}^2 \to 0$，因而 $y_n \to 1$。第二個數列收斂（converges），其極限（limit）是 1。

驗算

- 取 $A = 1$，則 $a = \sqrt{5} \approx 2.236$。於是 $x_2 = 3$、$x_3 = 7$，而且 $y_1 = \sqrt{5}/3 \approx 0.745$。由公式得 $\sqrt{9-4}/3 = \sqrt{5}/3$，兩者吻合。接着，$y_2 = \sqrt{5} \cdot 3/7 \approx 0.958$，而 $\sqrt{49-4}/7 = 3\sqrt{5}/7$，同樣吻合。$y_3 \approx 0.99909$ 和 $y_4 \approx 0.9999996$ 這兩項正飛快地趨向 1。
- 以 $t > 1$ 作代換 $a = t + 1/t$，可得 $x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}$。這顯示了增長實際上有多快（雙重指數（doubly exponential）增長，遠快於第 (i) 部分的 4^{n-1}），而且與上面每個結果都一致。
- 第 (i) 部分的界和第 (ii) 部分的有界性，亦已用電腦以大量隨機起始值測試過。

常見錯誤

- 未先檢查兩邊是否非負，就把歸納假設中的不等式平方。
- 在第 (ii) 部分，當 $|a| \leq 2$ 時只證明 $x_n \leq 2$。你還需要 $x_n \geq -2$，否則下一項可能跳到 2 以上。
- 倒推求出 a，卻從未確認這個值對所有 n 都適用，並且滿足 $a > 2$。

STEP 之外

映射（map）$x \mapsto x^2 - 2$ 是二次映射族（quadratic family）$x \mapsto x^2 + c$ 中最著名的成員。在 $[-2, 2]$ 上，代入 $x = 2\cos\theta$ 會把它變成倍角映射 $\theta \mapsto 2\theta$，這是混沌動力學（chaotic dynamics）的標準入門例子。在這個區間以外，每條軌道（orbit）都會逃逸到無限大。當 $a > 2$ 時，同樣的想法可用 $x = 2\cosh u$ 實現，而第 (iii) 部分的乘積就是經典的 $\prod \cos(\theta/2^k)$ 逐項相消的雙曲（hyperbolic）版本。想了解這裏的極限和歸納法背後的分析學，可閱讀 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。