詳細解答

STEP III 2021，第 7 題

純數學 • 幾何中的複數

STEP III 2021，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

把單位圓(unit circle)上的兩點相加或相減，即 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 時，先抽出「平均」因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\phi)/2}$。剩下的部分就是純粹的餘弦或純粹的正弦，第 (i) 部分正是靠這一點得以成立。第 (i) 部分的結論是 $(a+b)/(a-b)$ 為純虛數 (purely imaginary)，而在複平面 (complex plane) 上，「比值為純虛數」就代表「互相垂直（perpendicular)」。之後的一切，不過是對 a、b、c、d 的各種和作整理而已。

解答

第 (i) 部分

設 $\alpha = \frac{1}{2}(\theta+\phi)$ 及 $\beta = \frac{1}{2}(\theta-\phi)$，於是 $\theta = \alpha+\beta$ 而 $\phi = \alpha-\beta$。那麼

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\right) = 2\cos\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\right) = 2\mathrm{i}\sin\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.$$

條件 $\theta-\phi \neq 2n\pi$ 正好表示 β 不是 π 的倍數，因此 $\sin\beta \neq 0$，分母不為零。兩式相除，得

$$z = \frac{2\cos\beta}{2\mathrm{i}\sin\beta} = -\mathrm{i}\cot\beta = -\mathrm{i}\cot\left(\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)\right) = \mathrm{i}\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right),$$

這裏用到 $1/\mathrm{i} = -\mathrm{i}$，以及 cot 是奇函數（odd function）這一事實。這就是所求的結果。

由於 $\cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta))$ 是實數，z 位於虛軸上：

$$|z| = \left|\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right)\right|, \qquad \arg z = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{若 } \cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta)) > 0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{若 } \cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta)) < 0. \end{cases}$$

若 $\cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta))=0$，即 $\phi-\theta$ 是 π 的奇數倍，則 $z=0$，其輻角（argument）沒有定義。（這種情況出現在兩點位於直徑兩端時，此時兩者之和為零。）

第 (ii) 部分

由於 A 和 B 都在以原點為圓心的單位圓上，可記 $a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 及 $b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$。兩點相異，所以 $\theta-\phi$ 不是 2π 的倍數，第 (i) 部分適用：

$$\frac{x}{a-b}=\frac{a+b}{a-b}=\mathrm{i}k, \qquad k=\cot\Big(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\Big)\in\mathbb{R}.$$

因為 $x=a+b\neq 0$，所以 $k\neq 0$。於是 $x=\mathrm{i}k\,(a-b)$：向量 $\overrightarrow{OX}$（由 x 表示）就是把向量 $\overrightarrow{BA}$（由 $a-b$ 表示）旋轉一個直角，再乘以非零實數 k 所得。等價地說，$\arg x-\arg(a-b)=\pm\frac{1}{2}\pi$。因此 OX 垂直於 AB。

> **想一想** 為甚麼需要 $a+b\neq 0$？

若 $a+b=0$，則 X 就是原點本身。這時根本沒有直線 OX，也就談不上垂直。在代數上，這對應於 $k=0$ 的情況，此時 x 的輻角沒有定義。

第 (iii) 部分

設 $h=a+b+c$，則

$$h-a=b+c.$$

複數 $h-a$ 表示向量 $\overrightarrow{AH}$。分兩種情況。

- 若 $b+c=0$，則 $h-a=0$，故 $h=a$。
- 若 $b+c\neq 0$，則對單位圓上的相異兩點 B 和 C 應用第 (ii) 部分，可知由 $b+c$ 表示的向量垂直於 BC。這個向量正是 $\overrightarrow{AH}$，所以 AH 垂直於 BC。（此時 $H\neq A$，故 AH 確實是一條直線。）

所以 $h=a$ 或 $AH\perp BC$，即為所求。由對稱性，BH 與 CA、CH 與 AB 亦有同樣結論，所以 H 確實位於三條高（altitude）上。$h=a$ 的情況就是 BC 為直徑的時候：三角形在 A 處是直角，其垂心（orthocentre）就是頂點 A。

第 (iv) 部分

根據垂心的定義，

$$p=a+b+c, \qquad q=b+c+d, \qquad r=c+d+a, \qquad s=d+a+b.$$

AQ 的中點是

$$\tfrac{1}{2}(a+q)=\tfrac{1}{2}(a+b+c+d).$$

這個式子對 a, b, c, d 是對稱的，所以它同時也是 BR、CS 及 DP 的中點：

$$\tfrac{1}{2}(b+r) = \tfrac{1}{2}(c+s) = \tfrac{1}{2}(d+p) = \tfrac{1}{2}(a+b+c+d).$$

設 M 為由 $m = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ 表示的點。那麼

$$q = 2m - a, \qquad r = 2m - b, \qquad s = 2m - c, \qquad p = 2m - d.$$

所以單一個映射

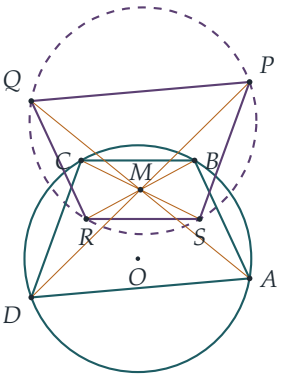
$$T : w \longmapsto 2m - w$$

把 $A \mapsto Q$、$B \mapsto R$、$C \mapsto S$ 及 $D \mapsto P$。因此它把四邊形 $ABCD$ 逐個頂點地映射到 $QRSP$。

要描述 T，可把它寫成 $T(w) - m = -(w - m)$。相對於 M 的位移被反向，也就是以 M 為中心乘以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$。所以

T 是繞複數爲 $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ 的點 M 旋轉（*rotation*）180°（即半周旋轉）。

等價地說，T 是關於點 M 的點反射（point reflection）。特別地，$QRSP$ 與 $ABCD$ 全等（congruent），而且由於旋轉保持定向，Q, R, S, P 同樣按逆時針方向排列。四個垂心都位於以複數 $a+b+c+d$ 所表示的點為圓心的單位圓上，這個圓就是經過 A, B, C, D 的圓的像。



驗算

- 第 (i) 部分：取 $\theta = 0$、$\phi = \frac{1}{2}\pi$，得 $z = (1+\mathrm{i})/(1-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$，而 $\mathrm{i}\cot\frac{1}{4}\pi = \mathrm{i}$。所以 $|z| = 1$ 且 $\arg z = \frac{1}{2}\pi$。
- 第 (iv) 部分：取 $a = 1$、$b = \mathrm{i}$、$c = -1$、$d = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$。則 $m = 0.3 + 0.1\mathrm{i}$，而 $q = b + c + d = -0.4 + 0.2\mathrm{i}$，正如所言等於 $2m - a$。對於正方形 $(a, b, c, d = 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i})$，得 $m = 0$，而 Q, R, S, P 恰好就是 C, D, A, B：半周旋轉的中心是 O。
- 四個部分亦已用電腦在圓上數以千計的隨機點上驗證過。

常見錯誤

- 只答 $\arg z = \frac{1}{2}\pi$。餘切的正負號決定答案是 $\pm\frac{1}{2}\pi$ 中的哪一個，而 $z = 0$ 則沒有輻角。
- 在第 (iv) 部分把頂點的對應次序弄錯。A 對應的是 Q，不是 P：與每個頂點相對的垂心，是*不包含*該頂點的那個三角形的垂心。
- 把映射描述為「一個旋轉」卻沒有說明中心和角度，或描述為「比例因子為 -1 的放大（enlargement）」卻沒有說明中心。兩種描述都可以，但都必須包含齊兩項資料。

STEP 之外

簡潔的公式 $h = a + b + c$（外心（circumcentre）位於原點時）是一整套複數幾何手法的起點。例如，形心（centroid）是 $\frac{1}{3}(a + b + c)$，所以 O、形心與 H 共線，這條直線就是歐拉線（Euler line）。第 (iv) 部分是同一故事在圓內接四邊形（cyclic quadrilateral）上的一個小片段。Tristan Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）全書都把複數乘法看作旋轉與縮放，是極佳的下一步讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。