詳細解答

STEP III 2021，第 6 題

純數學 • 反函數與導數

STEP III 2021，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

兩個函數看起來都令人望而生畏，但它們的導數（derivative）原來都非常簡單。導數為 $\frac{1}{1+x^2}$ 的函數必定是 $\tan^{-1} x$ 加上一個常數，而導數為零的函數是常數，但只是在它有定義的每一個區間（interval）上各自成立。所以真正的工作是利用一個方便的數值或一個極限，求出每一段上各自的常數，並留意函數在無定義之點的跳躍。

解答

第 (i) 部分

設 $t = \tan\alpha$，則 $t > 0$；再設 $u = \dfrac{xt+1}{t-x}$，於是 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} u$。由商法則（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{t(t-x)+(xt+1)}{(t-x)^2} = \frac{1+t^2}{(t-x)^2},$$

而且

$$1+u^2 = \frac{(t-x)^2+(xt+1)^2}{(t-x)^2} = \frac{t^2+x^2+x^2t^2+1}{(t-x)^2} = \frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t-x)^2}.$$

所以由鏈式法則（chain rule），

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2},$$

即所求。

想一想 這是否表示 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$，其中 c 是單一個常數？

不是。函數在 $x = \tan\alpha$ 處無定義，所以定義域（domain）是兩個分開的區間；在每一個區間上，$f_\alpha(x) - \tan^{-1} x$ 的導數為零，因此是常數，但兩個常數不一定相同。

當 $x < \tan\alpha$ 時：在 $x = 0$ 處，我們有 $f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$，因為 $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$。因此

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x < \tan\alpha).$$

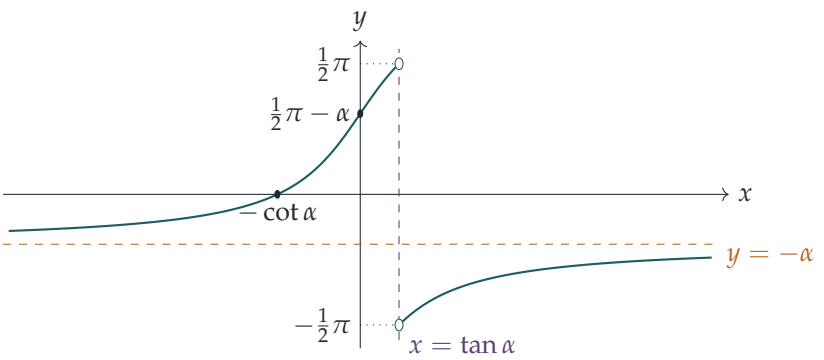
當 $x > \tan\alpha$ 時：當 $x \to \tan\alpha$ 而 x 從上方趨近時，分子 $xt + 1$ 趨於 $1 + t^2 > 0$，而分母 $t - x$ 經負值趨於 0，所以 $u \to -\infty$，且 $f_\alpha(x) \to -\frac{1}{2}\pi$。由於 $\tan^{-1} x \to \alpha$，常數是 $-\frac{1}{2}\pi - \alpha$：

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x - \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x > \tan\alpha).$$

（從下方用同樣的極限論證，可得 $u \to +\infty$ 及數值 $\frac{1}{2}\pi$，與第一條公式一致。）

所以這個圖像就是 $y = \tan^{-1} x$ 的圖像分成兩段，一段向上平移 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$，另一段向下平移 $\frac{1}{2}\pi + \alpha$。它的特徵如下：

- 在每一段上都是遞增的，斜率（gradient）為 $\frac{1}{1+x^2}$；
- 當 $x \to \pm\infty$ 時，$y \to -\alpha$（左端從上方趨近，右端從下方趨近），所以 $y = -\alpha$ 是兩端的漸近線（asymptote）；
- 左段由 $-\alpha$ 上升至 $x = \tan\alpha$ 處的 $\frac{1}{2}\pi$（不能達到），在 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 與 y 軸相交，並在 $\tan^{-1} x = \alpha - \frac{1}{2}\pi$ 之處，即 $x = -\cot\alpha$，與 x 軸相交；
- 右段在 $x = \tan\alpha$ 處從略高於 $-\frac{1}{2}\pi$ 的位置開始，上升至 $-\alpha$；它整段位於 x 軸下方；
- 在 $x = \tan\alpha$ 處有一個 $-\pi$ 的跳躍，而兩段在該處的斜率都是 $\cos^2\alpha$。

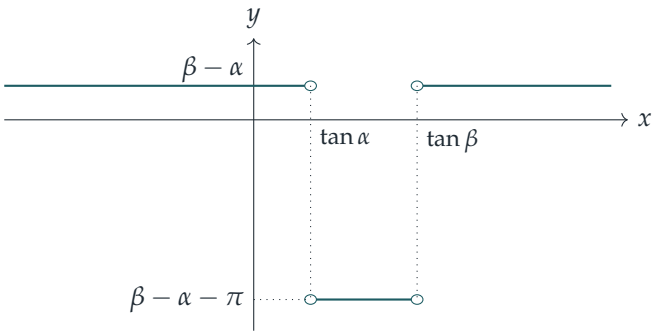


兩者之差。由於 $0 < \alpha < \beta < \frac{1}{2}\pi$，我們有 $\tan\alpha < \tan\beta$，所以共有三個區間。利用每個函數的兩條公式：

- 當 $x < \tan\alpha$ 時：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$；

- 當 $\tan\alpha < x < \tan\beta$ 時：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha - \pi$；
- 當 $x > \tan\beta$ 時：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (-\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$。

$\tan^{-1} x$ 項互相抵消，所以圖像是一個階梯函數（step function）：它是水平線 $y = \beta - \alpha$（位於 0 與 $\frac{1}{2}\pi$ 之間），但在 $\tan\alpha$ 與 $\tan\beta$ 之間的區間上則下降 π，變為 $y = \beta - \alpha - \pi$（位於 $-\pi$ 與 $-\frac{1}{2}\pi$ 之間）。函數在 $x = \tan\alpha$ 及 $x = \tan\beta$ 處無定義。



第 (ii) 部分

逐項求導。由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tanh^{-1} s = \dfrac{1}{1-s^2}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh^{-1}(\sin x) = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x,$$

又由於 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sinh^{-1} s = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(\tan x) = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{|\sec x|} = |\sec x|.$$

這裏的平方根取正值，所以才會出現絕對值（modulus）。因此 $g'(x) = \sec x - |\sec x|$。當 $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ 時，$\cos x < 0$，所以 $|\sec x| = -\sec x$，從而

$$g'(x) = 2\sec x,$$

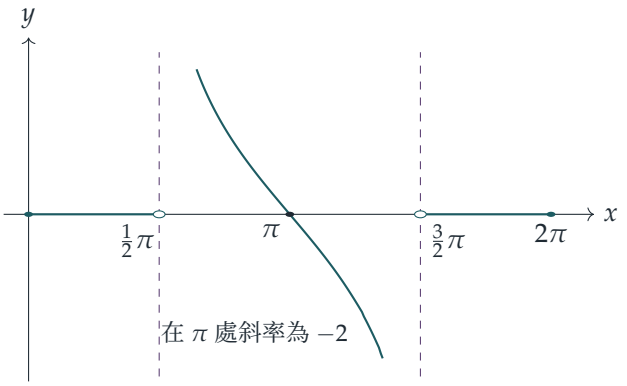
即所求。在另外兩個區間 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ 及 $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$ 上，$\cos x > 0$，所以同樣的計算得出 $g'(x) = 0$。

*外側的區間。*在這裏 g 在每個區間上都是常數。由於 $g(0) = \tanh^{-1} 0 - \sinh^{-1} 0 = 0$，同樣 $g(2\pi) = 0$，我們得到當 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ 及 $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$ 時，$g(x) = 0$。

*中間的區間。*在這裏 $g'(x) = 2\sec x < 0$，所以 g 嚴格遞減（strictly decreasing）。在中點處，$g(\pi) = \tanh^{-1} 0 - \sinh^{-1} 0 = 0$，且 $g'(\pi) = 2\sec\pi = -2$。在兩端：

- 當 $x \to \frac{1}{2}\pi^+$ 時，$\sin x \to 1$，所以 $\tanh^{-1}(\sin x) \to +\infty$，而 $\tan x \to -\infty$，所以 $-\sinh^{-1}(\tan x) \to +\infty$；因此 $g(x) \to +\infty$；
- 當 $x \to \frac{3}{2}\pi^-$ 時，$\sin x \to -1$ 且 $\tan x \to +\infty$，所以兩項都令 $g(x) \to -\infty$。

此外 $g''(x) = 2\sec x \tan x$。當 $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ 時，$\sec x$ 和 $\tan x$ 都是負數，所以 $g'' > 0$；當 $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ 時，$\sec x < 0 < \tan x$，所以 $g'' < 0$。因此 $(\pi, 0)$ 是一個拐點（point of inflection），該處斜率為 -2，而曲線關於這一點旋轉對稱（rotational symmetry）（事實上 $g'(2\pi - x) = g'(x)$ 且 $g(\pi) = 0$）。其實，由於 g 與 $2\tanh^{-1}(\sin x)$ 在這個區間上有相同的導數，而且兩者在 π 處都等於零，所以在該區間上 $g(x) = 2\tanh^{-1}(\sin x) = 2\ln|\sec x + \tan x|$。



驗算

- 取 $\alpha = 0.6$：$f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot 0.6) \approx 0.9708 = \frac{1}{2}\pi - 0.6$，而 $f_\alpha(\pm 10^9) \approx -0.6$，與漸近線的預測一致。
- $g(1) = \tanh^{-1}(\sin 1) - \sinh^{-1}(\tan 1) = 1.2261 - 1.2261 = 0$，證實了平坦的部分。用電腦檢驗數以千計的隨機點，結果與上述所有公式的誤差都在 10^{-6} 以內。

常見錯誤

- 寫成 $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$，處處只用一個常數。導數為零只能在一個區間上推出常數。
- 寫成 $\sqrt{\sec^2 x} = \sec x$。它其實是 $|\sec x|$，而正是這個符號，令 g 在兩個區間上為零，在第三個區間上卻不是。

STEP 之外

在一個區間上導數為零就迫使函數為常數，這是中值定理（Mean Value Theorem）的一個推論；而在不是區間的集合上，這個結論並不成立，兩個部分都顯示了這一點。第 (i) 部分其實就是 $\tan^{-1}$ 的加法公式（addition formula）連同 $\pm\pi$ 的修正，這種分支（branch）的記賬工作在複分析（complex analysis）中十分重要。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對中值定理及其推論有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。