詳細解答

STEP III 2021，第 5 題

純數學 • 極坐標曲線

STEP III 2021，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

兩條曲線都以 r 表示為 θ 的函數，所以它們在兩個 r 的表達式相等之處相交；若在該處兩個 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 的值亦相等，兩曲線便在該處相切（touch）。把一切寫成 $c = \cos\theta$ 的式子，相交條件便化為一個關於 c 的二次方程（quadratic）。這個二次方程的重根（repeated root）是相切的一種情況，但並非唯一的情況：由於 $\cos\theta$ 本身在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 處是平穩（stationary）的，所以在 $c = \pm 1$ 處的單根（simple root）亦會給出 θ 的二重零點。

解答

全文設 $c = \cos\theta$，並記

$$f(\theta) = a + 2\cos\theta, \qquad g(\theta) = 2 + \cos 2\theta = 1 + 2\cos^2\theta.$$

注意對所有 θ 均有 $g(\theta) \geq 1$，所以第二條曲線永不經過原點 O。在 O 以外，一個 $r > 0$ 的點有唯一的角 θ（相差 2π 的倍數除外）。因此兩曲線只可能在 r 和 θ 都相同的點相交。

第 (i) 部分

當 $f(\theta) = g(\theta)$ 時兩曲線相交，即 $a + 2c = 1 + 2c^2$，亦即

$$2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 - a = 0,$$

此即所求。為兩者之差命名會方便一些：

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta) = -(2c^2 - 2c + 1 - a).$$

何時相切？在公共點上，半徑與切線（tangent）之間的夾角 ψ 滿足 $\tan\psi = r \big/ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$。所以兩條經過同一點 (r, θ) 的曲線在該點有相同切線，當且僅當它們的 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 亦相同。因此

兩曲線在 $h(\theta)=0$ 且 $h'(\theta)=0$ 之處相切。求導得

$$h'(\theta) = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 2\sin\theta\,(2\cos\theta - 1).$$

所以 $h'(\theta)=0$ 當且僅當 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 或 $\sin\theta = 0$。

> **想一想** 關於 c 的二次方程只在 $a=\frac{1}{2}$ 時有重根。那麼為何還有其他 a 值？

c 的重根足以導致相切，但並非必要。映射 $\theta \mapsto \cos\theta$ 在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 處是平穩的。所以只要 $c = \pm 1$ 是根，h 在該處便有 θ 的二重零點。條件 $h' = 0$ 把兩種可能都包括在內。

- $\cos\theta = \frac{1}{2}$：代入相交方程得 $\frac{1}{2} - 1 + 1 - a = 0$，所以 $a = \frac{1}{2}$。（等價地，判別式（discriminant）$4 - 8(1-a)$ 在 $a = \frac{1}{2}$ 時為零，此時重根為 $c = \frac{1}{2}$。）所以當 $a = \frac{1}{2}$ 時兩曲線相切，此即所求。
- $\theta = 0$，$c = 1$：需要 $2 - 2 + 1 - a = 0$，所以 $a = 1$。此時兩曲線上皆有 $r = 3$。
- $\theta = \pi$，$c = -1$：需要 $2 + 2 + 1 - a = 0$，所以 $a = 5$。此時兩曲線上皆有 $r = 5 - 2 = 3$，故 $r \geq 0$ 成立。

因此另外兩個值是 $a = 1$ 和 $a = 5$。

第二條曲線的特徵

三幅草圖都包含 $r = 2 + \cos 2\theta$，所以我們只描述一次。它在 $\theta \to -\theta$ 和 $\theta \to \pi - \theta$ 下不變，所以它對兩條坐標軸都對稱（symmetric）。這裏 r 由 $\theta = 0, \pi$ 處的最大值 3 變到 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處的最小值 1。它不是橢圓。在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$ 附近，設 $s = \sin\theta$，

$$y = r\sin\theta = (3 - 2s^2)s = 3s - 2s^3, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 3 - 6s^2 = -3 \text{ 當} s = 1.$$

所以當 θ 離開 $\frac{1}{2}\pi$（而 s 降到 1 以下）時，y 反而增大。曲線在 $(0, \pm 1)$ 處有一個光滑的凹陷（dimple），而不是尖點（cusp），因為該處 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -2\sin 2\theta = 0$，切線是水平的。相比之下，$x = r\cos\theta = c + 2c^3$ 關於 c 遞增，所以 $(\pm 3, 0)$ 兩端只是圓滑的。

第一條曲線 $r = a + 2\cos\theta$ 關於初始線（initial line）對稱，因為它在 $\theta \to -\theta$ 下不變。它在 $\theta = 0$ 處有 $r = a + 2$，在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處有 $r = a$，而（當 $a \geq 2$ 時）在 $\theta = \pi$ 處有 $r = a - 2$。當 $a < 2$ 時，限制 $r \geq 0$ 使曲線在 $\cos\theta = -\frac{1}{2}a$ 處被截斷，曲線沿這兩個方向到達 O。

第 (ii) 部分

當 $a = \frac{1}{2}$ 時，

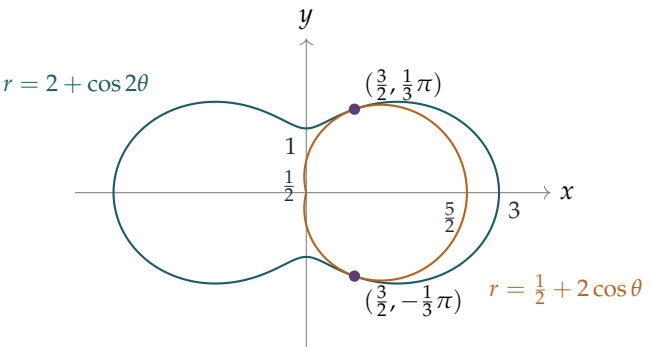
$$h(\theta) = -\left(2c^2 - 2c + \tfrac{1}{2}\right) = -2\left(c - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

所以第一條曲線處處位於第二條曲線之內，並只在 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 處與之相交。兩者相切於

$$\theta = \pm\tfrac{1}{3}\pi, \qquad r = \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{2}.$$

（驗算：$2 + \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}$，且在 $\theta = \frac{1}{3}\pi$ 處兩個 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 的值都等於 $-\sqrt{3}$。）

第一條曲線只在 $\cos\theta \geq -\frac{1}{4}$ 時存在，即 $|\theta| \leq \arccos(-\frac{1}{4}) \approx 104.5°$。它由初始線上的 $r = \frac{5}{2}$ 出發，經過 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處的 $r = \frac{1}{2}$，一直到達 O。它沿直線 $\theta = \pm\arccos(-\frac{1}{4})$ 到達 O，所以在原點處有一個角點（corner，即尖端），位置剛好在 y 軸左側。

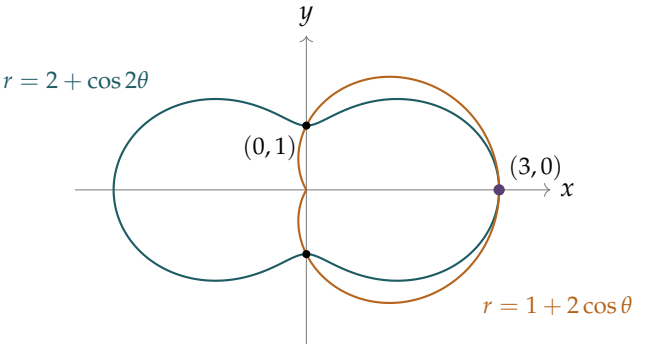


第 (iii) 部分

$a = 1$ 的情況。此時 $h(\theta) = -(2c^2 - 2c) = 2c(1 - c)$。兩曲線在 $c = 1$ 或 $c = 0$ 處相交。

- 它們在 $\theta = 0$、$r = 3$ 處相切，即點 $(3, 0)$。在 $\theta = 0$ 附近有 $0 < c < 1$，所以 $h > 0$，第一條曲線在切點兩側都略為位於第二條曲線之外。
- 在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處，兩曲線上皆有 $r = 1$：即點 $(0, \pm 1)$，也就是凹陷的底部。這裏 h 隨 c 變號，所以兩曲線相交而穿過。第一條曲線在 $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ 時位於外側，在 $|\theta| > \frac{1}{2}\pi$ 時位於內側。

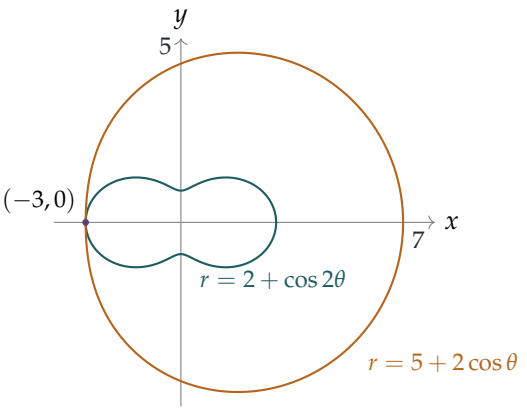
第一條曲線在 $\cos\theta \geq -\frac{1}{2}$ 時存在，即 $|\theta| \leq \frac{2}{3}\pi$。它沿直線 $\theta = \pm\frac{2}{3}\pi$ 到達 O，並在該處形成一個角點。



$a = 5$ 的情況。此時 $h(\theta) = -(2c^2 - 2c - 4) = 2(2 - c)(1 + c) \geq 0$，等號只在 $c = -1$ 時成立。所以第一條曲線完全位於第二條曲線之外，並只在

$$\theta = \pi, \qquad r = 3,$$

處與之相切，即點 $(-3, 0)$。由於 $a > 2$，現在處處有 $r > 0$，所以第一條曲線是一條閉合環線（一條沒有凹陷的蚶線（limaçon），因為 $a \geq 4$）。它在 $\theta = 0$ 處有 $r = 7$，在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處有 $r = 5$，在 $\theta = \pi$ 處有 $r = 3$。



驗算

- 在每個切點，比較兩個 r 值和兩個 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 值。對於 $a = 1$ 在 $\theta = 0$ 處，兩者皆 $r = 3$，兩個導數皆為 0；$a = 5$ 在 $\theta = \pi$ 處亦同樣成立。
- 以電腦在 $-3 \leq a < 9$ 範圍內以 0.01 為步長掃描，只在 $a = \frac{1}{2}$、1 和 5 時找到 $h = h' = 0$（且 $r \geq 0$）。這與因式分解（factorisation）$h' = 2\sin\theta(2\cos\theta - 1)$ 吻合。
- 點 $(0, 1)$ 位於第二條曲線上，而附近 $\theta = \frac{1}{2}\pi + 0.1$ 處的點有 $y \approx 1.015 > 1$。這證實了凹陷的存在。

常見錯誤

- 只做到判別式便停下，因而漏掉 $a = 1$ 和 $a = 5$。關於 $c = \cos\theta$ 的單根，仍然可以是關於 θ 的二重根。
- 把 $r = 2 + \cos 2\theta$ 畫成橢圓，或在 $(0, \pm 1)$ 處畫成尖點而不是光滑的凹陷。
- 在 $a = \frac{1}{2}$ 或 $a = 1$ 時畫出蚶線的內環。該內環上 $r < 0$，題目已將之排除。

STEP 之外

相切實際上是關於重數（multiplicity）的命題。兩條曲線在其方程之差沿曲線有重零點之處相切，而參數化（parametrisation）可以製造或隱藏這類零點，正如本題中的 $\cos\theta$ 一樣。在大學第一門關於曲線的課程中，這會發展成接觸階（order of contact）的概念，而極坐標（polar）曲線的曲率（curvature）$\left(r^2+2r'^2-rr''\right)/\left(r^2+r'^2\right)^{3/2}$ 正好解釋了 $2+\cos 2\theta$ 的凹陷從何而來。如想進一步了解參數曲線及其幾何，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階問題》）；至於光滑性與相切背後的分析，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。