詳細解答

STEP III 2021，第 4 題

純數學 • 向量與投影

> **STEP III 2021，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

這裏的一切都靠純量積（scalar product）完成：兩個向量之間的夾角可從 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\text{夾角})$ 讀出；而投影（projection）是線性（linear）的，所以 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ 的投影就是 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)$。第 (i) 部分證明兩個長度相等的向量的平均會平分（bisect）它們之間的夾角。在第 (iii) 部分，投影 $\mathbf{a}_1$ 與 $\mathbf{b}_1$ 的長度通常不同，所以除非出現某種特殊情況，否則我們應預期平分不成立。條件可以漂亮地因式分解（factorise），正好對應兩種特殊情況。

解答

第 (i) 部分

由於 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ 且 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos\theta$，

$$|\mathbf{m}|^2 = \tfrac{1}{4}\left(1 + 2\cos\theta + 1\right) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

所以 $|\mathbf{m}| = \cos\frac{\theta}{2}$，而因為 $0 < \theta < \pi$，它是正數。特別地，$\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$。此外

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{b}.$$

因此 $\mathbf{m}$ 與 $\mathbf{a}$ 之間夾角的餘弦是 $\cos^2\frac{\theta}{2}\big/\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$，對 $\mathbf{b}$ 亦然。所以兩個夾角都是 $\frac{\theta}{2}$。由於 $\mathbf{m}$ 位於 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 所在的平面上，而兩個夾角之和為 θ，故 $\mathbf{m}$ 平分 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之間的夾角。

第 (ii) 部分

按定義，以 $\mathbf{c}$ 為單位法向量（unit normal），且 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \cos\alpha$，

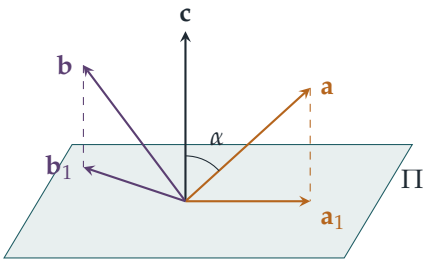
$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}, \qquad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}.$$

於是 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c} = \cos\alpha - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) = 0$，因為 $|\mathbf{c}| = 1$。同理 $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c} = 0$。

由於 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c} = 0$，我們得到 $|\mathbf{a}_1|^2 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}$，而且

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

由於 α 是銳角，$\sin\alpha > 0$，所以 $|\mathbf{a}_1| = \sin\alpha$。同樣地 $|\mathbf{b}_1| = \sin\beta$。兩者皆非零，所以夾角 ϕ 有定義。



至於投影之間的夾角，再次利用 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{c} = 0$ 消去一項：

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) = \cos\theta - \cos\alpha\cos\beta.$$

除以 $|\mathbf{a}_1||\mathbf{b}_1| = \sin\alpha\sin\beta$，得

$$\cos\phi = \frac{\cos\theta - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

即為所求。

第 (iii) 部分

投影是線性的，所以

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m} - (\mathbf{m}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} - \cos\alpha\,\mathbf{c}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} - \cos\beta\,\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1).$$

我們假設 $\mathbf{m}_1 \neq \mathbf{0}$，否則它沒有方向，不可能平分任何東西。由於 $\mathbf{m}_1$ 是 $\mathbf{a}_1$ 與 $\mathbf{b}_1$ 的正係數組合，它位於兩者所在的平面上，並且夾在兩者之間。所以它平分該夾角，當且僅當它與 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{b}_1$ 所成的角相等：

$$\frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}.$$

（我們已約去公因子 $|\mathbf{m}_1|$，而 cos 在 $[0, \pi]$ 上是一一對應（one-to-one）的。）

> ? **想一想** 為何不直接把第 (i) 部分應用於 $\mathbf{a}_1$ 與 $\mathbf{b}_1$？

第 (i) 部分需要 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$。這裏 $|\mathbf{a}_1| = \sin\alpha$，$|\mathbf{b}_1| = \sin\beta$，兩者通常不同。所以我們必須實際計算。

設 $P = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1$，$s = \sin\alpha$，$t = \sin\beta$。則

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \tfrac{1}{2}(s^2 + P), \qquad \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \tfrac{1}{2}(P + t^2).$$

兩邊乘以 $2st > 0$，條件變為

$$\begin{aligned} t(s^2 + P) = s(t^2 + P) &\iff st(s - t) - P(s - t) = 0 \\ &\iff (s - t)(st - P) = 0. \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{m}_1$ 平分該夾角，當且僅當 $s = t$ 或 $P = st$。

- $s = t$ 即 $\sin\alpha = \sin\beta$。由於 sin 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上嚴格遞增，而兩個角都是銳角，此式成立當且僅當 $\alpha = \beta$。
- 由第 (ii) 部分，$P = \cos\theta - \cos\alpha\cos\beta$。所以 $P = st$ 即

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

每一步都是等價（equivalence）關係，所以 $\mathbf{m}_1$ 平分 $\mathbf{a}_1$ 與 $\mathbf{b}_1$ 之間的夾角，當且僅當 $\alpha = \beta$ 或 $\cos\theta = \cos(\alpha - \beta)$。

從幾何角度看，第一種情況表示 $\mathbf{a}_1$ 與 $\mathbf{b}_1$ 長度相等，所以第 (i) 部分終究適用。第二種情況表示 $\cos\phi = 1$：兩個投影指向同一方向（當 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 與 $\mathbf{c}$ 共面（coplanar），且 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 位於 $\mathbf{c}$ 的同一側時）。此時夾角為零，平分是平凡成立的。

驗算

- 取 $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$（本題不容許，但是一個有用的極限情況）。此時 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 本身已在平面上，公式給出 $\cos\phi = \cos\theta$，理應如此。
- 取 $\alpha = \frac{\pi}{3}$、$\beta = \frac{\pi}{4}$ 及 $\theta = \frac{\pi}{2}$，公式給出 $\cos\phi = -\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{6}/4} = -1/\sqrt{3} \approx -0.577$。這與明確構造出這些向量後的結果一致。
- $\cos\phi$ 的公式及因式分解後的平分條件，都已用電腦在數千組隨機單位向量三元組上驗證。

常見錯誤

- 忘記 $|\mathbf{a}_1| \neq 1$。單位向量的投影並非單位向量，所以分母 $\sin\alpha\sin\beta$ 不可缺少。
- 以為 $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ 的角平分線總是 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$。這只在長度相等時成立。一般而言，角平分線是 $\mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1| + \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|$。
- 除以 $\sin\alpha - \sin\beta$ 而不是因式分解，因而遺漏了 $\alpha = \beta$ 的情況。

STEP 之外

投影到平面上是一個線性映射（*linear map*） $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$，其矩陣為 $I - \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$。線性映射保持和，但不保持長度或角度，這正是本題結果如此的原因。$\cos\phi$ 的公式其實是喬裝了的球面餘弦定理（spherical cosine rule）。這裏 ϕ 是以 **a**、**b** 及 **c** 為頂點的球面三角形（spherical triangle）在頂點 **c** 處的角，其三邊為 α、β 及 θ。關於投影與正交性（orthogonality），可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。