詳細解答

STEP III 2021，第 3 題

純數學 • 積分不等式

> **STEP III 2021，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

對被升至 n 次冪的那個式子求導。對於 $u = \sec x + \tan x$，其導數(derivative)是 $u \sec x$，這使 $u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 可以直接積分，所以要做的就是把 $I_{n+1} + I_{n-1}$ 的被積函數（integrand）改寫成這個形式。至於不等式（inequality），則來自比較被積函數 $u^n = u^{n-1} \cdot u$ 與可直接積分的 $u^{n-1} \cdot u'$：若 $u < u'$，則積分（integral）小於 $[u^n/n]$。

解答

第 (i) 部分

設 $u = \sec x + \tan x$。則

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x\,(\sec x + \tan x) = u \sec x.$$

此外，利用 $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$，

$$u^2 + 1 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x + 1 = 2\sec^2 x + 2\sec x \tan x = 2u \sec x = 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

因此對於 $n \geq 1$，

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^\beta u^{n-1}\left(u^2+1\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^\beta u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\Big[u^n\Big]_0^\beta \\ &= \frac{2}{n}\left((\sec\beta + \tan\beta)^n - 1\right), \end{aligned}$$

因為在 $x = 0$ 時 $u = 1$。兩邊除以二，即得所求的恆等式（identity）。

? **想一想** 恆等式涉及 I_{n+1} 和 I_{n-1}，但不等式卻是關於 I_n 的。怎樣才能把中間那一項夾進去？

比較 u^2+1 與 $2u$。我們有 $u^2+1-2u=(u-1)^2\geq 0$，而當 $0<x\leq\beta$ 時，$\sec x>1$ 且 $\tan x>0$，所以 $u>1$，不等式在該處嚴格成立。乘以 $u^{n-1}>0$，得在 $(0,\beta]$ 上 $u^{n+1}+u^{n-1}>2u^n$；積分後（被積函數連續，且不等式在一個長度為正的區間上嚴格成立）得

$$I_{n+1}+I_{n-1}>2I_n,\qquad \text{所以}\qquad I_n<\tfrac{1}{2}\left(I_{n+1}+I_{n-1}\right)=\frac{1}{n}\left((\sec\beta+\tan\beta)^n-1\right).$$

（等價地說：當 $x>0$ 時 $u'-u=u(\sec x-1)>0$，所以 $I_n=\int_0^\beta u^{n-1}u\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta u^{n-1}u'\,\mathrm{d}x$。正是這個觀點可以延用到第 (ii) 部分。）

第 (ii) 部分

記 $c=\cos\beta$，則 $0<c<1$，並設 $v=c\sec x+\tan x$。則

$$v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=c\sec x\tan x+\sec^2 x.$$

在端點處，$v(0)=c=\cos\beta$，而 $v(\beta)=1+\tan\beta$，正好是目標式中的兩個數。因此上界就是 $\frac{1}{n}[v^n]_0^\beta=\int_0^\beta v^{n-1}v'\,\mathrm{d}x$，只需證明在整個 $[0,\beta]$ 上 $v<v'$ 便足夠。

? **想一想** 在第 (i) 部分中，u^2+1 恰好等於 $2u'$。對於 v，相應的關係是甚麼？

重複第 (i) 部分的計算，

$$v^2+1=c^2\sec^2x+2c\sec x\tan x+\tan^2x+1=(1+c^2)\sec^2x+2c\sec x\tan x,$$

所以

$$2v'-(v^2+1)=(1-c^2)\sec^2x=\sin^2\beta\,\sec^2x.$$

這不再是等式，但剩餘項是正的。結合 $v^2+1-2v=(v-1)^2$，

$$2(v'-v)=(v-1)^2+\sin^2\beta\,\sec^2x>0,$$

因為當 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ 時 $\sin\beta\neq 0$。故對每個 $x\in[0,\beta]$，$v<v'$。

最後，在 $[0,\beta]$ 上 $v>0$（因為 $c>0$、$\sec x>0$ 且 $\tan x\geq 0$），所以 $v^{n-1}>0$，從而 $v^n=v^{n-1}v<v^{n-1}v'$。在 $[0,\beta]$ 上積分，對於 $n\geq 1$，

$$J_n=\int_0^\beta v^n\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta v^{n-1}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\Big[v^n\Big]_0^\beta=\frac{1}{n}\left((1+\tan\beta)^n-\cos^n\beta\right),$$

得證。

驗算

- 當 $n = 1$ 時，(i) 中的恆等式說 $\frac{1}{2}(I_2 + \beta) = \sec\beta + \tan\beta - 1$。取 $\beta = 1$，數值積分（numerical integration）得兩邊均為 2.40822…。
- 取 $\beta = 1$、$n = 3$：數值上 $I_3 \approx 8.774$，而上界為 12.863；$J_3 \approx 3.326$，而上界為 5.523。
- 在 (ii) 中形式上代入 $\cos\beta = 1$，J_n 就變成 I_n，剩餘項 $\sin^2\beta\sec^2 x$ 亦隨之消失：第 (ii) 部分確實是第 (i) 部分的一個擾動（perturbation）。

常見錯誤

- 忘記檢查正負：把 $v < v'$ 乘以 v^{n-1} 需要 $v^{n-1} > 0$，這正是 $v > 0$ 之所以重要的原因。
- 只得出 $\leq$：嚴格不等式需要 $u > 1$（或 $\sin\beta \neq 0$）在一個區間上成立，而不僅僅在一點上成立。
- 計算 $v(\beta)$ 時粗心：$\sec\beta\cos\beta = 1$，$1 + \tan\beta$ 正是由此而來。

STEP 之外

「若逐點有 $0 < f \leq g$，且在某處嚴格成立，則 $\int f < \int g$」這個論證，就是積分的單調性（monotonicity），分析課程會從黎曼積分（Riemann integral）的定義出發把它仔細證明。把一個難處理的被積函數與一個精確的導數作比較，是估計積分和級數（series）上下界的標準方法，它亦會在積分判別法（integral test）等估計中再次出現。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）嚴謹地講述了積分以及這類比較論證。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。