詳細解答

STEP III 2021，第 2 題

純數學 • 行列式與不等式

STEP III 2021，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

將 x、y、z 各自的定義去分母後，都會得到一條關於 a、b、c 的線性（linear）方程。三條這樣的方程組成一個齊次線性方程組（homogeneous linear system），而它有非零解 (a,b,c)，所以係數矩陣（matrix of coefficients）必定是奇異（singular）的，即其行列式（determinant）為零。這個行列式正好就是我們想要的、關於 x、y、z 的對稱（symmetric）表達式。之後，只要把目標式改寫成 x、y、z 的式子，再運用平方和的基本性質和算術－幾何平均不等式（AM–GM），就能得出那些不等式。

解答

第 (i) 部分

由於 a、b、c 互不相同，所有分母都不為零。去分母，得

$$x(b-c)=a, \qquad y(c-a)=b, \qquad z(a-b)=c.$$

現在逐行展開矩陣乘積：

$$\begin{aligned} a-xb+xc &= a-x(b-c)=a-a=0,\\ ya+b-yc &= b-y(c-a)=b-b=0,\\ -za+zb+c &= c-z(a-b)=c-c=0, \end{aligned}$$

這正是所求的矩陣方程。

把這個 3×3 矩陣記作 M。由於 a、b、c 互不相同，它們不會全為零，所以 M 把一個非零向量（vector）映射到零向量。

想一想 為甚麼這樣就迫使 $\det M = 0$？

若 $\det M \neq 0$，則 M^{-1} 存在；在 $M\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 兩邊左乘 M^{-1}，便得 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$，與 $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ 矛盾。所以 $\det M = 0$。沿第一行展開，

$$\begin{aligned}\det M &= 1\cdot(1+yz) + x(y-yz) + x(yz+z)\\ &= 1 + yz + xy - xyz + xyz + xz\\ &= 1 + xy + yz + zx.\end{aligned}$$

令它等於零，即得 $yz + zx + xy = -1$。

至於不等式，左邊是 $x^2+y^2+z^2$。利用恆等式（identity）$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$，

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 + 2 \geq 2,$$

因為實數 $x+y+z$ 的平方是非負的。這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

這裏的分母都是正數，去分母後得 $x(b+c) = 2a$，其餘類似。重新整理成關於 a、b、c 的線性方程：

$$\begin{pmatrix} -2 & x & x \\ y & -2 & y \\ z & z & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（第一行即 $-2a + x(b+c) = 0$，其餘兩行類似。）由於 $a,b,c > 0$，這個向量非零，所以與第 (i) 部分完全一樣，行列式為零：

$$\begin{aligned}0 &= -2(4-yz) - x(-2y-yz) + x(yz+2z)\\ &= -8 + 2yz + 2xy + xyz + xyz + 2xz\\ &= -8 + 2(xy+yz+zx) + 2xyz.\end{aligned}$$

兩邊除以 2，得 $xyz + yz + zx + xy = 4$。

第一個不等式。竅門是把左邊每個括號除以右邊對應的括號：

$$\frac{2a+b+c}{b+c} = \frac{2a}{b+c} + 1 = 1 + x,$$

另外兩個也類似。由於 $(b+c)(c+a)(a+b) > 0$，所求不等式等價於 $(1+x)(1+y)(1+z) > 5$。展開並利用剛證得的結果，

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 1 + (x+y+z) + (xy+yz+zx) + xyz = 5 + (x+y+z).$$

由於 x、y、z 都是正數，上式大於 5，第一個不等式得證。

第二個不等式。按同樣的計算，現在需要證明 $x+y+z>2$。記 $S=x+y+z$。

> **想一想** 我們知道 $xy+yz+zx+xyz=4$。這怎樣能迫使 S 不會太小？

$xy+yz+zx$ 和 xyz 都可以用 S 給出上界：

- $S^2-3(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\geq 0$，所以 $xy+yz+zx\leq \frac{1}{3}S^2$；
- 對正數 x、y、z 應用算術－幾何平均不等式，得 $xyz\leq\left(\frac{1}{3}S\right)^3=\frac{1}{27}S^3$。

兩式相加，

$$4=xy+yz+zx+xyz\leq\tfrac{1}{3}S^2+\tfrac{1}{27}S^3.$$

當 $S>0$ 時，右邊是 S 的遞增函數（increasing function），而當 $S=3$ 時它等於 $3+1=4$。所以若 $S<3$，右邊便會小於 4，這是不可能的。因此 $S\geq 3$，而

$$\frac{(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=5+S\geq 8>7,$$

第二個不等式得證（事實上更得出較強的下界 8，當 $a=b=c$ 時取得）。

驗算

- 在第 (ii) 部分取 $a=b=c=1$：左邊為 $4^3=64$，而 $(b+c)(c+a)(a+b)=8$，所以比值為 8，與 $x=y=z=1$、$S=3$ 時的 $5+S$ 吻合。此外 $xyz+xy+yz+zx=1+3=4$。
- 在第 (i) 部分取 $(a,b,c)=(0,1,2)$：則 $x=0$、$y=\frac{1}{2}$、$z=-2$，而 $xy+yz+zx=-1$，符合要求；平方和為 $\frac{17}{4}\geq 2$。
- 用電腦對 20 000 組隨機有理數三元組驗算，兩條恆等式都準確成立；第 (ii) 部分找到的最小比值約為 8.0001，而當 $a=b=1$、$c=10^{-6}$ 時比值約為 9.0，所以下界 8 確實是最小值，遠高於 7。

常見錯誤

- 斷言 $\det M=0$ 卻不說明理由：關鍵在於 (a,b,c) 是非零向量，這在第 (i) 部分需要「互不相同」，在第 (ii) 部分需要「正數」。
- 把 $2a+b+c$ 除以 $b+c$ 時得出 $1+\frac{1}{2}x$ 而不是 $1+x$：記住 x 本身已經包含因數 2。

- 用 $xy + yz + zx < 4$（一個上界）去嘗試給 S 找下界；不等式的方向必須反過來，如上文所示。

STEP 之外

方陣把某個非零向量映射到零，當且僅當其行列式為零——這是線性代數（linear algebra）的核心：特徵值（eigenvalues）正是透過 $\det(A - \lambda I) = 0$ 求得的。第 (ii) 部分中的下界 $S \geq 3$ 其實就是改頭換面的 Nesbitt 不等式（Nesbitt's inequality）$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$。線性代數方面，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）；若想多做這類不等式，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題集》）是極佳的練習材料。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。