詳細解答

STEP III 2021，第 11 題

概率與統計 • 指數分佈

STEP III 2021，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 12.18 節無記憶性中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/memoryless.html

關鍵思路

所有關於 Y 和 Z 的問題，其實都是在問 X 落在哪一個區間（interval）。事件 $Y = n$ 就是 $n \le X < n+1$，而事件 $Z < z$ 可拆成一系列互斥（disjoint）的部分 $n \le X < n+z$，每個 n 對應一部分。指數分佈（exponential distribution）的尾概率（tail probability）$\mathrm{P}(X \ge x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$ 會把每一部分變成一個幾何級數（geometric series）中的項。

解答

全文記 $q = \mathrm{e}^{-\lambda}$；由於 $\lambda > 0$，故 $0 < q < 1$。對 $x \ge 0$，

$$\mathrm{P}(X \ge x) = \int_x^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

又因 X 是連續（continuous）隨機變量，對 $0 \le a < b$ 有 $\mathrm{P}(a \le X < b) = \mathrm{P}(a < X < b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$。

第 (i) 部分

Y 是 X 的整數部分（integer part），所以 $Y = n$ 當且僅當 $n \le X < n+1$。因此

$$\mathrm{P}(Y = n) = \mathrm{e}^{-n\lambda} - \mathrm{e}^{-(n+1)\lambda} = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-n\lambda},$$

即為所求。（所以 Y 服從由 0 開始、公比為 q 的幾何分佈（geometric distribution）。）

第 (ii) 部分

$Z = X - Y$ 是 X 的小數部分（fractional part），所以 $0 \le Z < 1$。取 $0 \le z \le 1$。事件 $Z < z$ 發生，當且僅當對整數 $n = Y$ 有 $n \le X < n + z$。對 $n = 0, 1, 2, \ldots$，這些事件兩兩互斥，所以

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Z < z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(n \le X < n + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-n\lambda} - \mathrm{e}^{-n\lambda - \lambda z}\right) \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-\lambda z}) \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}, \end{aligned}$$

這裏把幾何級數求和，而因 $0 < q < 1$，該級數收斂（converges）。這就是所求的結果。

第 (iii) 部分

把 (ii) 的分佈函數（distribution function）求導，得 Z 的概率密度（probability density）為

$$g(z) = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \qquad (0 \le z \le 1),$$

其餘情況 $g(z) = 0$。取 $u = z$ 及 $\mathrm{d}v = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z$ 進行分部積分（integration by parts），

$$\int_0^1 z\lambda \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z = \left[-z\mathrm{e}^{-\lambda z}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}.$$

除以 $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$，

$$\mathrm{E}(Z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda} - 1}.$$

第 (iv) 部分

設 $0 \le z_1 < z_2 \le 1$。事件 $\{Y = n \text{ 及} z_1 < Z < z_2\}$ 恰好就是 $n + z_1 < X < n + z_2$，所以

$$\mathrm{P}(Y = n \text{ 及} z_1 < Z < z_2) = \mathrm{e}^{-\lambda(n+z_1)} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+z_2)} = \mathrm{e}^{-n\lambda}\left(\mathrm{e}^{-\lambda z_1} - \mathrm{e}^{-\lambda z_2}\right).$$

? **想一想** 要判斷是否獨立，我們需要拿這個結果跟甚麼比較？

跟乘積 $\mathrm{P}(Y = n)\,\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2)$ 比較。由於 Z 是連續的，$\mathrm{P}(Z = z_1) = 0$，故由 (ii)

$$\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2) = \mathrm{P}(Z < z_2) - \mathrm{P}(Z < z_1) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda z_1} - \mathrm{e}^{-\lambda z_2}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}.$$

乘以 (i) 中的 $\mathrm{P}(Y = n) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-n\lambda}$，因子 $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$ 互相抵消，正好得到上面的聯合概率（joint probability）。所以

$$\mathrm{P}(Y = n \text{ 及} z_1 < Z < z_2) = \mathrm{P}(Y = n)\,\mathrm{P}(z_1 < Z < z_2)$$

對每個非負整數 n 及每個區間 $(z_1, z_2) \subseteq [0,1]$ 都成立。由於 Y 只取非負整數值，而 Z 只取 $[0,1)$ 中的值，這類事件決定了整個聯合分佈。因此 Y 和 Z 是獨立（independent）的：知道 X 落在哪一個單位區間，並不會告訴我們它落在該區間內的哪個位置。

驗算

- 在 (ii) 中代入 $z = 1$，得 $\mathrm{P}(Z < 1) = 1$，理應如此；代入 $z = 0$ 則得 0。
- 當 $\lambda \to 0$ 時，X 的密度在每個單位區間上幾乎是平的，所以 Z 應接近 $[0,1]$ 上的均勻分佈（uniform distribution）。事實上，由 $\mathrm{e}^{\lambda} - 1 = \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \cdots$ 得 $\frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} + O(\lambda)$，所以 $\mathrm{E}(Z) \to \frac{1}{2}$。當 $\lambda \to \infty$ 時，X 幾乎總是非常小，而 $\mathrm{E}(Z) \to 0$。
- 當 $\lambda = 1$ 時，$\mathrm{E}(Z) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}-1} \approx 0.4180$，這與以電腦模擬 200 000 個 X 值的結果吻合；(iv) 中模擬所得的聯合頻率亦與邊際分佈（marginal distributions）的乘積吻合。

常見錯誤

- 寫成 $\mathrm{P}(Z < z) = \mathrm{P}(X < z)$，忘記了 $Z < z$ 可以在每一個單位區間發生，而不只是第一個。
- 只憑一組 n、z_1、z_2 的取值就斷定獨立：因式分解必須對所有取值都成立。

STEP 之外

(iv) 中的獨立性，其實是指數分佈無記憶性（memoryless property）的一個影子：已知 $X \geq n$，無論 n 是多少，超出部分 $X - n$ 仍然服從相同參數的指數分佈。這正是指數分佈用來描述泊松過程（Poisson process）中等候時間的原因，也是它的整數部分服從幾何分佈——即離散的無記憶分佈——的原因。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對這兩種分佈及泊松過程都有詳細闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。