詳細解答

# STEP III 2021，第 10 題

力學 • 纏繞繩的運動

> **STEP III 2021，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

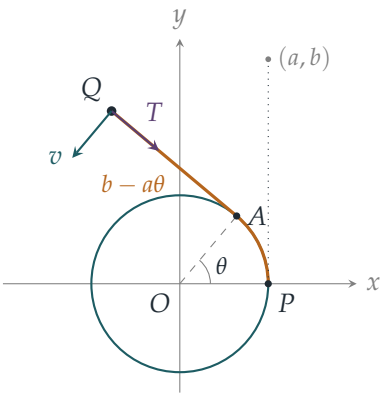
## 關鍵思路

用繩子直線部分轉過的角度 $\theta$ 來描述一切。繩子沿切線（tangent）離開圓柱（cylinder），所以質點的位置等於切點加上一個長度為 $b - a\theta$ 的切向量。求導後可見質點的速度永遠與繩子垂直，因此張力（tension）不做功（work），速率始終不變。在每一瞬間，質點都在一個以繩子離開圓柱之點為圓心的圓上運動，而張力提供所需的向心力（centripetal force）。

## 解答

我們把質點視為在光滑（smooth）水平桌面上運動的一點，因此它所受的唯一水平力就是輕而不可伸長的繩（light inextensible string）中的張力 $T$（重量由桌面的法向反作用力（normal reaction）平衡）。整個過程中繩子都保持拉緊。

要令繩子繞到圓柱上，衝量（impulse）必須使質點從 $(a, b)$ 沿 $x$ 負方向出發，於是繩子按逆時針（anticlockwise）方向轉動。設 $A$ 為時刻 $t$ 時繩子直線部分離開圓柱之點。




**第 (i) 部分**

由於通往 $P$ 的半徑已轉過 $\theta$，點 $A$ 為 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$。繞在圓柱上的繩長就是弧 $PA$，長度為 $a\theta$，所以直線部分的長度為 $b-a\theta$。它沿着 $A$ 點的切線、朝 $\theta$ 增大的方向伸出，即單位向量（unit vector）$(-\sin\theta, \cos\theta)$ 的方向。（當 $\theta = 0$ 時這向量是 $(0,1)$，與初始位置 $(a,b)$ 吻合。）因此質點位於

$$x = a\cos\theta - (b-a\theta)\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta + (b-a\theta)\cos\theta.$$

利用積法則（product rule）及 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b-a\theta) = -a\dot\theta$，對 $t$ 求導，得

$$\dot x = -a\dot\theta\sin\theta + a\dot\theta\sin\theta - (b-a\theta)\dot\theta\cos\theta = -(b-a\theta)\dot\theta\cos\theta,$$
$$\dot y = a\dot\theta\cos\theta - a\dot\theta\cos\theta - (b-a\theta)\dot\theta\sin\theta = -(b-a\theta)\dot\theta\sin\theta.$$

因此 $\dot x^2 + \dot y^2 = (b-a\theta)^2\dot\theta^2$；又因 $b-a\theta > 0$ 且 $\dot\theta > 0$（繩子正在繞上去），速率為

$$v = (b-a\theta)\dot\theta.$$

**第 (ii) 部分**

> ? **想一想** 為甚麼速率應該一直等於 $u$？繩子明明一直在拉着質點。

由第 (i) 部分，速度為 $-(b-a\theta)\dot\theta\,(\cos\theta, \sin\theta)$，與半徑 $OA$ 平行，因此與方向為 $(-\sin\theta, \cos\theta)$ 的繩子垂直。張力沿繩子作用，所以它做功的速率 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}$ 在每一瞬間都是零。沒有其他水平力作用，所以動能（kinetic energy）以至速率都保持不變。初始速率為 $u$，故

$$\dot\theta\,(b-a\theta) = u,$$

即為所求。

**第 (iii) 部分**

由 (ii)，速度為 $\mathbf{v} = -u(\cos\theta, \sin\theta)$，其中 $u$ 為常數，所以加速度為

$$\dot{\mathbf{v}} = -u\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta).$$

它的大小為 $u\dot{\theta}$，方向由質點指向 $A$，恰好沿着繩子。（等價地說：在每一瞬間，質點以速率 $u$ 繞 $A$ 在半徑為 $b - a\theta$ 的圓上運動，所以它的加速度是指向 $A$ 的 $u^2/(b - a\theta)$。）沿繩子方向應用牛頓第二定律（Newton's second law），得

$$T = mu\dot{\theta} = \frac{mu^2}{b - a\theta}.$$

餘下要做的是把 $b - a\theta$ 以 $t$ 表示。將 (ii) 對 $t$ 積分，並利用 $t = 0$ 時 $\theta = 0$，得

$$b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = ut.$$

於是

$$(b - a\theta)^2 = b^2 - 2a\left(b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2\right) = b^2 - 2aut,$$

又因 $b - a\theta > 0$，我們取正根，$b - a\theta = \sqrt{b^2 - 2aut}$。因此

$$T = \frac{mu^2}{\sqrt{b^2 - 2aut}},$$

即為所求。

## 驗算

- 當 $t = 0$ 時張力為 $mu^2/b$：質點起初以速率 $u$ 繞 $P$ 在半徑為 $b$ 的圓上運動，與預期一致。
- 當 $a\theta = b$ 時繩子完全繞上，這發生在 $t = b^2/(2au)$；此時 $b^2 - 2aut = 0$，張力無限增大，因為在速率不變的情況下，瞬時圓的半徑縮小至零。
- 量綱（dimensions）：$b^2$ 和 $aut$ 都是面積，而 $mu^2$/長度 是力。
- 我們用電腦驗證了結果：對 $a$、$b$、$u$、$m$ 的多組隨機取值，以數值方法逐步模擬運動，並以數值方法對位置求導；速率保持為 $u$，而量得沿繩方向的力與 $mu^2/\sqrt{b^2 - 2aut}$ 相符，相對誤差約為 $3 \times 10^{-5}$。

## 常見錯誤

- 假設繞 $O$ 的角動量（angular momentum）守恆。其實並不守恆：張力沿圓柱的切線作用，而這條切線不經過 $O$，所以張力對 $O$ 有力矩（moment）。這裏守恆的量是能量。

- 把直線部分的長度當作 $b$ 而非 $b - a\theta$，忘記了已經繞在圓柱上的那段繩子。
- 在計算張力時，把質點路徑的半徑 $OQ$，而非直線長度 $AQ$，當作曲率半徑（radius of curvature）。

## STEP 之外

繩子從一條曲線上解開(或繞上去)時，繩端描出的路徑稱為漸開線(involute)；圓的漸開線是大多數齒輪齒形的形狀，因為它能令互相嚙合的齒輪平穩地傳遞運動。這道題也展示了大學一年級力學中會遇到的一個普遍原理：與速度垂直的約束力（constraint force）不做功，所以即使動量（momentum）和角動量不守恆，能量仍可以守恆。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這類問題有很好的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。