詳細解答

STEP III 2021，第 1 題

純數學 • 參數曲線的法線

> **STEP III 2021，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

兩部分都依循同一套步驟：先對參數方程（parametric equations）求導，再取 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的負倒數（negative reciprocal），得出法線（normal）的斜率（gradient），然後整理方程。整理的過程正是最有趣的地方。把整條方程乘開以消去分數，三角函數項便會化簡成一條簡短而對稱的直線方程。一旦直線寫成 $x\sin\phi + y\cos\phi = \ldots$ 或 $x\cos\phi + y\sin\phi = \ldots$ 的形式，它的幾何性質（截距（intercepts）、與原點的距離）便一眼可見。

解答

第 (i) 部分

對 t 求導，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 12\cos^2 t\,\sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 12\cos t - 12\sin^2 t\cos t = 12\cos t\,(1-\sin^2 t) = 12\cos^3 t.$$

因此，當 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$（此時 $\sin t$ 和 $\cos t$ 均不為零），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{12\cos^3 t}{12\cos^2 t\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

在 $t = \phi$ 處，切線（tangent）的斜率為 $\cot\phi$，所以法線的斜率為 $-\tan\phi = -\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$。因此法線為

$$y - 12\sin\phi + 4\sin^3\phi = -\frac{\sin\phi}{\cos\phi}(x + 4\cos^3\phi).$$

乘以 $\cos\phi$，並把 x 和 y 項移到左方：

$$\begin{aligned} x\sin\phi + y\cos\phi &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin^3\phi\cos\phi - 4\cos^3\phi\sin\phi \\ &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin\phi\cos\phi\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= 8\sin\phi\cos\phi. \end{aligned}$$

所以法線為

$$\boxed{x\sin\phi + y\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi} \qquad \text{或等價地} \qquad \frac{x}{\cos\phi} + \frac{y}{\sin\phi} = 8.$$

第二種形式顯示法線與兩軸相交於 $(8\cos\phi, 0)$ 和 $(0, 8\sin\phi)$。

相切。設 $P = (8\cos^3\phi,\ 8\sin^3\phi)$。我們需要證明三件事。

P 在曲線 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 上。由於 $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$，兩個坐標都是正數，所以其實數立方根（cube root）分別是 $2\cos\phi$ 和 $2\sin\phi$。因此 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4\cos^2\phi + 4\sin^2\phi = 4$。

P 在法線上。代入可得

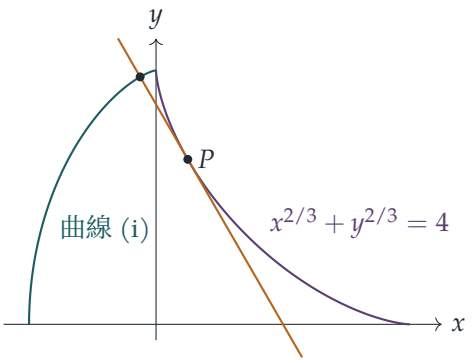
$$8\cos^3\phi\sin\phi + 8\sin^3\phi\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 8\sin\phi\cos\phi.$$

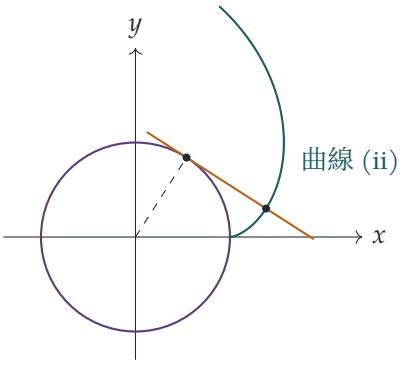
兩者在 P 處的斜率相同。對 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 進行隱函數微分（implicit differentiation）（當 $x, y > 0$ 時成立），

$$\tfrac{2}{3}x^{-1/3} + \tfrac{2}{3}y^{-1/3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} = -\frac{2\sin\phi}{2\cos\phi} = -\tan\phi \ \text{ 在}P,$$

這正好是法線的斜率。

一條穿過曲線上某點、且斜率與曲線在該點的斜率相同的直線，就是曲線在該點的切線。所以法線是 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 在 P 處的切線，得證。





兩幅圖中，曲線（青色）上某點的法線（琥珀色）都與第二條曲線（紫紅色）相切；兩幅圖都是就某個特定的 ϕ 值繪製的。

第 (ii) 部分

對 t 求導（對 $t\sin t$ 和 $t\cos t$ 項使用乘積法則（product rule）），

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

當 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ 時，$t\cos t \neq 0$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{t\sin t}{t\cos t} = \tan t$。在 $t = \phi$ 處，法線的斜率為 $-\cot\phi = -\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$，其方程為

$$y - \sin\phi + \phi\cos\phi = -\frac{\cos\phi}{\sin\phi}(x - \cos\phi - \phi\sin\phi).$$

乘以 $\sin\phi$，

$$y\sin\phi - \sin^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi = -x\cos\phi + \cos^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi.$$

兩邊的 $\phi\sin\phi\cos\phi$ 項互相抵消，再利用 $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$，剩下

$$\boxed{x\cos\phi + y\sin\phi = 1}.$$

想一想 怎樣可以不求垂足（foot of the perpendicular）而求出原點到一條直線的距離？

點 (x_0, y_0) 到直線 $ax + by = c$ 的距離是 $\dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$。這裏 $(x_0, y_0) = (0,0)$、$a = \cos\phi$、$b = \sin\phi$ 及 $c = 1$，所以距離為

$$\frac{|-1|}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}} = 1.$$

你也可以直接看出來：$(\cos\phi, \sin\phi)$ 是垂直於該直線的單位向量（unit vector），而點 $(\cos\phi, \sin\phi)$ 本身亦滿足該方程。所以從 O 出發的垂足是 $(\cos\phi, \sin\phi)$，距離為 1。

該曲線。無論 ϕ 取何值，每條法線與原點的距離都是 1。一條與 O 相距 1 的直線，只會在垂足處與以 O 為圓心、半徑為 1 的圓相交，而且在該處與半徑垂直。因此它是該圓的切線。所以每條法線都是

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1},$$

的切線，切點為 $(\cos\phi, \sin\phi)$。

驗算

- 在 (i) 中取 $\phi = \frac{1}{3}\pi$。曲線上的點為 $(-\frac{1}{2},\ 6\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}) = (-0.5,\ 7.794)$，而法線 $2x + \frac{2}{\sqrt{3}}y = 8$ 與兩軸相交於 $(4,0)$ 和 $(0, 4\sqrt{3}) \approx (0, 6.928)$。點 $P = (1,\ 3\sqrt{3}) \approx (1,\ 5.196)$ 滿足 $2 + 6 = 8$，所以它在法線上，而且 $1^{2/3} + (3\sqrt{3})^{2/3} = 1 + 3 = 4$。

- 在 (ii) 中，當 $\phi \to 0$ 時，曲線從單位圓上的 $(1,0)$ 開始，而該處的法線趨向鉛垂線 $x = 1$，這確實是 $x^2 + y^2 = 1$ 的切線。
- 用電腦對一千個隨機的 ϕ 值進行驗算，在捨入誤差範圍內證實了所有法線方程、(i) 中的相切關係，以及 (ii) 中的單位距離。

常見錯誤

- 在 (i) 中把 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 算錯：$12\cos t - 12\sin^2 t \cos t$ 可化簡為 $12\cos^3 t$，正是這個因式分解（factorisation）令斜率變得如此簡單。
- 在 (i) 中只驗證 P 在法線上。一條穿過曲線上某點的直線不一定是該點的切線；斜率也必須相同。
- 在 (ii) 中只答「一個圓」，卻沒有給出它的方程、圓心和半徑。

STEP 之外

一條曲線所有法線的包絡線（envelope）稱為該曲線的*漸屈線*（evolute）。它是曲率中心（centres of curvature）的軌跡（locus）。因此第 (i) 部分顯示星形線（astroid）$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 是第一條曲線的漸屈線。在 (ii) 中，該曲線是單位圓的*漸開線*（involute）（即從線軲上拉緊解開的繩子末端所描出的路徑），而它的漸屈線就是該圓。圓的漸開線是大多數齒輪齒形的輪廓。這些概念屬於曲線的微分幾何（differential geometry）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）以優美的幾何方式探討這類平面曲線的推理，是很好的參考讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。