詳細解答

STEP II 2021，第 9 題

力學 • 靜力學

STEP II 2021，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

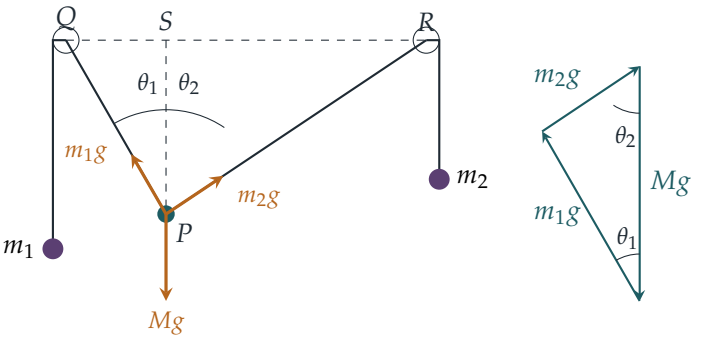
www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

由於滑輪（pulley）是光滑的，每段繩的張力（tension）都等於其遠端所懸掛質點的重量，所以作用在 P 上的三個力，大小之比為 $m_1 : m_2 : M$。這三個力首尾相接，組成一個力三角形（triangle of forces），三邊分別為 $m_1 g$、$m_2 g$ 和 Mg，而各內角則由 θ_1 和 θ_2 構成。對這個三角形應用餘弦定律（cosine rule），便能得出所有結果：題中的不等式來自要求該三角形存在且兩個角均為銳角（acute），而所求的比則來自 $\tan\theta_1$ 和 $\tan\theta_2$。

解答

模型。各質點（particle）視為點質量，繩是輕而不可伸長的，滑輪細小且光滑。因此 PQ 段的張力等於支撐 m_1 的鉛直段的張力，而 m_1 處於平衡（equilibrium），故 $T_1 = m_1 g$。同理，PR 段的張力為 $T_2 = m_2 g$。記 $h = SP$。



第 (i) 部分

在 P 點沿水平和鉛直方向分解（並約去 g）：

$$m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2, \qquad m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 = M. \tag{$*$}$$

等價地說，把三個力首尾相接，會組成一個封閉三角形，三邊為 $m_1 g$、$m_2 g$、Mg（見圖右方）。邊 Mg 是鉛直的，所以邊 Mg 與邊 $m_1 g$ 之間的夾角為 θ_1（與邊 $m_2 g$ 相對），而 Mg 與 $m_2 g$ 之間的夾角為 θ_2（與 $m_1 g$ 相對）。第三個角與 Mg 相對，大小為 $180^\circ - \theta_1 - \theta_2$。

如果你較喜歡用代數而非圖形，同樣的結果亦可直接由 $(*)$ 得出：寫成 $m_1 \cos\theta_1 = M - m_2 \cos\theta_2$ 及 $m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2$，兩式平方後相加：

$$m_1^2 = M^2 + m_2^2 - 2Mm_2 \cos\theta_2, \quad \text{所以} \quad \cos\theta_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2Mm_2},$$

再把兩邊的角色互換，得

$$\cos\theta_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2Mm_1}.$$

(a) 力三角形是一個真正的（非退化的）三角形，因為 $\theta_1 + \theta_2$ 嚴格介於 0° 與 180° 之間。因此三角不等式（triangle inequality）是嚴格的，由此得 $M < m_1 + m_2$。

至於下界，我們利用 θ_2 是銳角這一事實，即 $\cos\theta_2 > 0$。由於 $2Mm_2 > 0$，上面的公式給出

$$M^2 + m_2^2 - m_1^2 > 0 \iff M^2 > m_1^2 - m_2^2 \iff M > \sqrt{m_1^2 - m_2^2},$$

其中最後一步成立，是因為 $M > 0$ 且 $m_1^2 - m_2^2 > 0$。合起來，

$$\sqrt{m_1^2 - m_2^2} < M < m_1 + m_2.$$

? **想一想** 為甚麼重要的是關於 θ_2 的條件，而不是關於 θ_1 的條件？

在三角形中，較長的邊對着較大的角。由於 $m_1 > m_2$，角 θ_2（與 $m_1 g$ 相對）大於 θ_1（與 $m_2 g$ 相對）。所以只要 θ_2 是銳角，θ_1 自然也是銳角；真正起限制作用的只有 θ_2。（事實上，由於 $m_1 > m_2$，對任何 $M > 0$ 都有 $\cos\theta_1 > 0$。）

(b) 在直角三角形 QSP 和 RSP 中，$SP = h$，

$$QS = h\tan\theta_1, \qquad SR = h\tan\theta_2.$$

因此

$$\begin{aligned} r = \frac{QS}{SR} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} &= \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \\ &= \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2Mm_2}\cdot\frac{2Mm_1}{M^2+m_1^2-m_2^2} \quad \text{（利用 } (*) \text{ 及上述餘弦式）} \\ &= \frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{M^2-m_2^2+m_1^2}, \end{aligned}$$

這正是所求的比。由 (a) 部，分子分母兩個式子均為正，所以 $r>0$；又因 $m_1>m_2$，故 $r<1$：點 S 較接近 Q，與圖中所示一致。

第 (ii) 部分

對力三角形中的邊 Mg 應用餘弦定律，其對角為 $180^\circ-(\theta_1+\theta_2)$，得

$$M^2 = m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos(\theta_1+\theta_2).$$

（用代數方法：把 $(*)$ 中兩條方程平方後相加。）由 $M^2=m_1^2+m_2^2$，必然有 $\cos(\theta_1+\theta_2)=0$。由於 θ_1 和 θ_2 均為銳角，$0^\circ<\theta_1+\theta_2<180^\circ$，唯一的可能是

$$\theta_1+\theta_2 = 90^\circ.$$

所以繩在 P 點成直角。（這個 M 值確實落在 (a) 部的範圍內，因此這個構型是存在的。）

此時餘弦式得以簡化：$\cos\theta_1=\dfrac{2m_1^2}{2Mm_1}=\dfrac{m_1}{M}$ 及 $\cos\theta_2=\dfrac{m_2}{M}$。由於 $\theta_2=90^\circ-\theta_1$，得 $\sin\theta_1=\cos\theta_2=m_2/M$，所以

$$\tan\theta_1=\frac{m_2}{m_1}, \qquad \tan\theta_2=\frac{1}{\tan\theta_1}=\frac{m_1}{m_2}.$$

因此

$$\frac{QR}{SP}=\frac{h\tan\theta_1+h\tan\theta_2}{h}=\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2}=\frac{m_1^2+m_2^2}{m_1m_2},$$

即 $QR:SP=(m_1^2+m_2^2):m_1m_2$。

驗算

- 取 $m_1=5$、$m_2=3$、$M=6$（在 $4<M<8$ 之內），以數值方法解 $(*)$，得 $\theta_1\approx 29.93^\circ$ 及 $\theta_2\approx 56.25^\circ$。於是 $\tan\theta_1/\tan\theta_2\approx 0.3846=\frac{5}{13}$，與 $r=\frac{36-25+9}{36-9+25}=\frac{20}{52}$ 吻合。
- 在範圍的兩端：當 $M\to\sqrt{m_1^2-m_2^2}$ 時，$\theta_2\to 90^\circ$ 且 $r\to 0$（繩 PR 變成水平）；當 $M\to m_1+m_2$ 時，兩個角都趨向 0，而 P 會下沉至遠低於 QR 的位置。
- 第 (ii) 部分取 $m_1=4$、$m_2=3$、$M=5$：$\tan\theta_1=\frac{3}{4}$，$\tan\theta_2=\frac{4}{3}$，且 $QR/SP=\frac{25}{12}$。驗證 $(*)$：$4\cdot\frac{3}{5}=3\cdot\frac{4}{5}$ 及 $4\cdot\frac{4}{5}+3\cdot\frac{3}{5}=5$。

常見錯誤

- 誤把力三角形中與 Mg 相對的角當作 $\theta_1 + \theta_2$，而不是 $180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$，結果令餘弦定律中的正負號反轉。
- 使用非嚴格的三角不等式，或忘記下界需要用到兩個角均為銳角這個條件。
- 把比倒轉：$r = QS/SR$，而 QS 是靠近較重質點的那一邊。

STEP 之外

力三角形是一個一般事實的最簡單情況：處於平衡的各力之和為零向量，所以把它們首尾相接畫出來，會組成一個封閉多邊形。工程師利用這個想法（即「力多邊形」（force polygon））來分析桁架結構；而在大學一年級的力學中，它以靜力學（statics）的向量形式再次出現，並配合力矩（moment）亦須平衡的條件。如欲深入了解，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。