詳細解答

STEP II 2021，第 8 題

純數學 • 積分遞推關係

STEP II 2021，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 2.9 節逐步逼近 e 的分數中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/e-approximations.html

關鍵思路

函數 $t^n(1-t)^n$ 是單一個二次式 $u=t(1-t)$ 的冪，所以對它求導只不過是用兩次鏈式法則（chain rule）。這個函數及其一階導數（derivative）在 $t=0$ 和 $t=1$ 處都等於零，所以把它與 e^t 一起進行兩次分部積分（integration by parts）時，所有邊界項（boundary terms）都會消失，而第 (i) 部分的二階導數就直接變成一條遞推關係（recurrence）。這些積分被夾在 0 與一個極小的數之間，由此迫使分數 $-a_n/b_n$ 成為 e 的極佳近似。

解答

第 (i) 部分

設 $u=t(1-t)=t-t^2$，於是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=1-2t$，$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=-2$，且

$$(1-2t)^2=1-4t+4t^2=1-4u.$$

設 $f(t) = t^n(1-t)^n = u^n$，由鏈式法則得 $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$。再用乘積法則（product rule）求導一次（對 $n \geq 2$ 成立，此時 u^{n-2} 是多項式），

$$\begin{aligned} f''(t) &= n(n-1)u^{n-2}(1-2t)^2 - 2nu^{n-1} \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1)(1-4u) - 2u\big] \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1) - (4n-2)u\big] \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\big[(n-1) - 2(2n-1)t(1-t)\big], \end{aligned}$$

這正是所求的結果。

第 (ii) 部分

仍設 $f(t) = t^n(1-t)^n$，其中 $n \geq 2$，於是 $n!\,T_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$。進行兩次分部積分，每次都對多項式求導、對 e^t 積分，

$$\int_0^1 f\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[f\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 - \Big[f'\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 + \int_0^1 f''\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

想一想 為甚麼兩個邊界項都會消失？

因為 $f(t) = u^n$ 和 $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$ 都含有因子 $u = t(1-t)$（這裏用到 $n \geq 2$，故 $n-1 \geq 1$），而在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 處都有 $u = 0$。所以

$$n!\,T_n = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

現在代入第 (i) 部分的結果，把它寫成 $f'' = n(n-1)u^{n-2} - 2n(2n-1)u^{n-1}$：

$$\begin{aligned} n!\,T_n &= n(n-1)\int_0^1 u^{n-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - 2n(2n-1)\int_0^1 u^{n-1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= n(n-1)\,(n-2)!\,T_{n-2} - 2n(2n-1)\,(n-1)!\,T_{n-1} \\ &= n!\,T_{n-2} - 2(2n-1)\,n!\,T_{n-1}, \end{aligned}$$

這裏用到 $\int_0^1 u^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = k!\,T_k$。兩邊除以 $n!$ 得

$$T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1} \qquad (n \geq 2),$$

即為所求。

第 (iii) 部分

首先，$T_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1$。

至於 $T_1 = \int_0^1 (t-t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$，可以透過求導驗證 $\int t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t$ 及 $\int t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t^2 - 2t + 2)\mathrm{e}^t$，所以

$$\int_0^1 (t-t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[(-t^2+3t-3)\mathrm{e}^t\Big]_0^1 = -\mathrm{e} + 3,$$

即 $T_1 = 3 - \mathrm{e}$。

因此 $T_0 = a_0 + b_0\mathrm{e}$，其中 $(a_0, b_0) = (-1, 1)$；$T_1 = a_1 + b_1\mathrm{e}$，其中 $(a_1, b_1) = (3, -1)$，全部都是整數。假設對某個 $n \geq 2$，T_{n-2} 和 T_{n-1} 都具有這種整數係數的形式。由第 (ii) 部分，

$$T_n = \big(a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}\big) + \big(b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}\big)\mathrm{e},$$

由於 $2(2n-1)$ 是整數，兩個括號內都是整數。由（強）歸納法（strong induction），每個 $n \geq 0$ 的 T_n 都可寫成 $a_n + b_n\mathrm{e}$，其中 $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$。

第 (iv) 部分

上下界。當 $0 < t < 1$ 時，有 $0 < t(1-t) \leq \frac{1}{4} < 1$，所以 $0 < t^n(1-t)^n \leq 1$，而且 $0 < \mathrm{e}^t < \mathrm{e}$。因此在開區間 $(0, 1)$ 上

$$0 < \frac{t^n(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

被積函數（integrand）是連續的，所以把這些嚴格不等式在 $[0, 1]$（一個長度為 1 的區間）上積分後，不等式仍然是嚴格的：

$$0 < T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!} \qquad (n \geq 0).$$

（當 $n = 0$ 時，左邊的因子就是 1，嚴格性來自 $\mathrm{e}^t < \mathrm{e}$。）

極限。由於 $b_n \neq 0$，把 $T_n = a_n + b_n\mathrm{e}$ 除以 b_n：

$$-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e} = -\frac{T_n}{b_n}, \qquad \text{所以} \qquad \left|-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e}\right| = \frac{T_n}{|b_n|} \leq T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

這裏用到 b_n 是非零整數，所以 $|b_n| \geq 1$。當 $n \to \infty$ 時，$\mathrm{e}/n! \to 0$，所以 $-a_n/b_n \to \mathrm{e}$。

事實上，這個界非常寬鬆。由遞推關係得 $(a_2, b_2) = (-19, 7)$ 及 $(a_3, b_3) = (193, -71)$，給出近似值 $\frac{19}{7} \approx 2.714$ 和 $\frac{193}{71} \approx 2.71831$，而 $\mathrm{e} \approx 2.71828$。

驗算

- 在第 (i) 部分代入 $n = 2$：$t^2(1-t)^2 = t^2 - 2t^3 + t^4$ 的二階導數是 $2 - 12t + 12t^2$，而公式給出 $2\big[1 - 6t(1-t)\big] = 2 - 12t + 12t^2$。
- $T_1 = 3 - \mathrm{e} \approx 0.2817$ 是正數且小於 $\mathrm{e}/1!$，正如第 (iv) 部分所要求。接着 $T_2 = T_0 - 6T_1 = 7\mathrm{e} - 19 \approx 0.0280$；用電腦計算積分可確認這個值，並確認 n 直至 11 時遞推關係和上下界都成立。
- 當 $n = 4, 5, 6$ 時，$-a_n/b_n$ 的值分別是 $\frac{2721}{1001}$、$\frac{49171}{18089}$、$\frac{1084483}{398959}$，與 e 分別相差約 10^{-7}、3×10^{-10} 和 5×10^{-13}：比單憑 $\mathrm{e}/n!$ 所預示的快得多。

常見錯誤

- 忘記說明邊界項為何消失，或沒有留意這需要 $n \geq 2$：當 $n = 1$ 時，導數 $1 - 2t$ 在兩端都不為零。
- 在第 (iv) 部分只用了 $b_n \neq 0$，而沒有用 $|b_n| \geq 1$。一個非零實數可以非常小；正是因為 b_n 是整數，T_n / b_n 才不會變得無限大。

STEP 之外

這正是埃爾米特（Hermite）在 1873 年證明 e 是無理數（irrational）、甚至是超越數（transcendental）的方法的核心：構造一些非零但趨向零的整數組合 $a_n + b_n \mathrm{e}$。若 $\mathrm{e} = p/q$，則 $q(a_n + b_n \mathrm{e}) = q a_n + b_n p$ 會是一個小於 $q\mathrm{e}/n!$ 的正整數，而當 n 足夠大時這是不可能的；同樣的多項式 $t^n(1-t)^n$ 亦出現在 Beukers 證明 $\zeta(3)$ 是無理數的著名證明中。若想進一步了解數能被分數逼近到甚麼程度，可閱讀 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。