詳細解答

STEP II 2021，第 7 題

純數學 • 旋轉矩陣

> **STEP II 2021，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

2×2 旋轉矩陣（rotation matrix）的形狀非常固定：它必定是 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，因此它的每一列都是單位向量（unit vector）。要求 $\mathbf{R}+\mathbf{I}$ 保持這個形狀，就能把 ϕ 完全確定下來。對於一般滿足 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$ 的矩陣，有用的工具是行列式（determinant）（它具有乘性（multiplicative））以及關係式 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I}$；後者讓我們可以把 $\mathbf{S}$ 的任何冪寫成 $\mathbf{S}$ 與 $\mathbf{I}$ 的組合。

解答

第 (i) 部分

記 $c = \cos\phi$ 及 $s = \sin\phi$，於是

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1+c & -s \\ s & 1+c \end{pmatrix}.$$

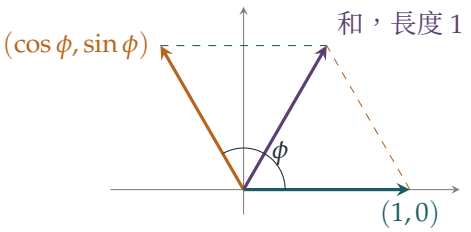
它本身已具有 $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ 的形式，而這樣的矩陣是旋轉，當且僅當 $p^2+q^2=1$（此時對某個 θ 有 $(p,q) = (\cos\theta, \sin\theta)$）。因此我們需要

$$(1+c)^2 + s^2 = 1 \iff 2+2c = 1 \iff \cos\phi = -\tfrac{1}{2}.$$

在 $0^\circ \le \phi < 360^\circ$ 的範圍內，得 $\phi = 120^\circ$ 或 $\phi = 240^\circ$。

從幾何角度看，$\mathbf{R}+\mathbf{I}$ 的第一列是單位向量 $(1,0)$ 與 $(\cos\phi, \sin\phi)$ 之和，而我們要求這個和也是單位向量：三個向量構成一個等邊三角形（equilateral triangle），如下圖（$\phi =$

120°）所示。



無論哪種情況，$\mathbf{R}^3$ 都是轉過 3ϕ 的旋轉，即 360° 或 720°，是整數圈。因此 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{I}$。

第 (ii) 部分

行列式。由於 det 具有乘性，$(\det \mathbf{S})^3 = \det(\mathbf{S}^3) = \det \mathbf{I} = 1$。矩陣是實矩陣，所以 $\det \mathbf{S}$ 是一個立方等於 1 的實數，而這樣的實數只有 1。故 $\det \mathbf{S} = ad - bc = 1$。

二次關係式。展開得

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}, \qquad (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} a^2 + ad - 1 & ab + bd \\ ac + dc & ad + d^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

非對角元素（off-diagonal entries）相同，而對角元素亦相同，因為 $bc = ad - 1$（即 $\det \mathbf{S} = 1$）。因此 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - \mathbf{I}$，得證。

跡。設 $t = a + d$（即跡（trace））。把關係式乘以 $\mathbf{S}$，再用一次該關係式：

$$\mathbf{S}^3 = t\mathbf{S}^2 - \mathbf{S} = t(t\mathbf{S} - \mathbf{I}) - \mathbf{S} = (t^2 - 1)\mathbf{S} - t\mathbf{I}.$$

令 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$，得

$$(t^2 - 1)\mathbf{S} = (t+1)\mathbf{I}.$$

? **想一想** 我們可以直接除以 $t^2 - 1$ 就完事嗎？

不可以掉以輕心：我們必須另外考慮 $t^2 - 1 = 0$ 的情況，而事實上正正就是這個情況會出現。

- 若 $t^2 \neq 1$，則 $\mathbf{S} = \dfrac{t+1}{t^2-1}\mathbf{I} = k\mathbf{I}$，其中 k 為實數。於是 $\mathbf{S}^3 = k^3\mathbf{I} = \mathbf{I}$ 迫使 $k^3 = 1$，所以 $k = 1$ 而 $\mathbf{S} = \mathbf{I}$，但這已被排除。
- 所以 $t^2 = 1$。方程變為 $\mathbf{0} = (t+1)\mathbf{I}$，故 $t = -1$（若 $t = 1$ 則會得出 $2\mathbf{I} = \mathbf{0}$，這是錯的）。

因此 $a + d = -1$。

第 (iii) 部分

首先，$\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$：否則 $\mathbf{S}+\mathbf{I} = 2\mathbf{I}$，其行列式為 4，而且會把長度加倍，所以不是旋轉。因此第 (ii) 部分適用，得 $a+d=-1$。

由於 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$ 是旋轉，設其轉角為 θ，則

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix}.$$

跡的條件給出 $2\cos\theta - 2 = -1$，所以 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 及 $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。於是

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

它具有旋轉的形式，且 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$。所以 $\mathbf{S}$ 是旋轉，其餘弦為 $-\frac{1}{2}$，正弦為 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。

轉角是 120°（當 $\theta = 60°$）或 240°（當 $\theta = 300°$）。兩者確實都會出現：由第 (i) 部分，這兩個旋轉都使 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$ 為旋轉，且 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$。（等價地，一旦知道 $\mathbf{S}$ 是旋轉，第 (i) 部分本身已列出所有可能的轉角。）

驗算

- 當 $\phi = 120°$，$\mathbf{R}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，即轉過 60° 的旋轉；當 $\phi = 240°$，它是轉過 300° 的旋轉。
- 矩陣 $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 滿足 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$（乘出來便知），但不是旋轉；它仍然有行列式 1 和跡 -1，與第 (ii) 部分的預測一致。它的 $\mathbf{S}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不是旋轉，與第 (iii) 部分相符。
- 用電腦檢查了大量滿足 $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$、$\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$ 的隨機實矩陣，每次都確認行列式為 1、跡為 -1，且 $\mathbf{S}^2$ 的關係式成立；在第 (iii) 部分掃描 θ，只找到 $\theta = 60°, 300°$。

常見錯誤

- 除以 $t^2 - 1$ 而沒有檢查它會否為零；$t^2 = 1$ 的情況恰恰就是答案。
- 忘記在第 (iii) 部分中，必須先確立 $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$，才可以使用第 (ii) 部分。

▶ 以為 $\det(\mathbf{S}+\mathbf{I}) = 1$ 就足以令 $\mathbf{S}+\mathbf{I}$ 成為旋轉；在這裏它是自動成立的，所以不提供任何資訊。

STEP 之外

關係式 $\mathbf{S}^2 = (a+d)\mathbf{S} - (\det \mathbf{S})\mathbf{I}$ 是凱萊－哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem）在 2×2 情況下的特例：每個方陣都滿足它自己的特徵多項式（characteristic polynomial）。第 (ii) 部分說明，一個階為 3 的 2×2 實矩陣，其特徵值（eigenvalue）是兩個非實數的三次單位根（cube roots of unity），而這樣的矩陣必定相似（similar）於轉過 120° 的旋轉，但不一定等於它。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）對特徵值和相似性有深入的發展。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。