詳細解答

STEP II 2021，第 6 題

純數學 • 圓幾何的近似

> **STEP II 2021，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

一切都發生在同一個三角形之中：A、道路的圓心 O，以及騎車者所走圓弧的圓心 O'。由對稱性可知，O' 位於經過 O 並平分 $\angle AOB$ 的直線上，而相切（tangency）的條件則確定了距離 OO'。在這個三角形中運用餘弦定理（cosine rule）和正弦定理（sine rule），便可得出 d 和 $\alpha - \theta$。至於最後一部分，*遠小於 1* 的意思是我們只保留 w/R 的一階（first-order）項，並使用小角近似（small-angle approximation）。

解答

以 O 為原點，並使對稱軸成鉛直方向，於是 $A = (-(R+w)\sin\alpha,\ (R+w)\cos\alpha)$，而 B 是它的鏡像。道路就是區域 $R \le r \le R+w$，其中 r 是與 O 的距離。

第 (i) 部分

弦（chord）AB 上最接近 O 的點是它的中點 M，因為 $OM \perp AB$（三角形 OAB 是等腰（isosceles）三角形）。於是

$$OM = (R+w)\cos\alpha \le \tfrac{1}{2}(R+w) < \tfrac{1}{2}(R+R) = R,$$

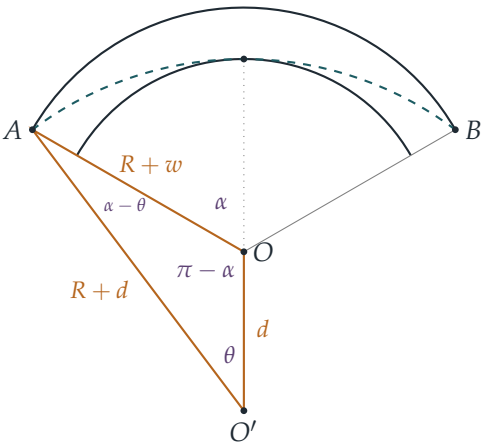
這裏先用了 $\cos\alpha \le \frac{1}{2}$（因為 $\frac{1}{3}\pi \le \alpha \le \frac{1}{2}\pi$），再用了 $w < R$。所以 M 嚴格位於內圓之內，即不在道路上。任何由 A 直線騎到 B 的路線都會經過 M，因此不可能一直留在道路上。

第 (ii) 部分

O' **在哪裏？**該圓經過 A 和 B，所以其圓心與兩點等距，位於 AB 的垂直平分線（perpendicular bisector）上，也就是經過 O 的對稱軸。它與內圓相切，而且比內圓大（$R+d>R$），所以內圓位於它之內，與它內切（internally tangent）。對於內切的兩個圓，圓心之間的距離等於半徑之差：

$$OO' = (R+d) - R = d.$$

路線向外、即朝道路的方向凸出，所以 O' 位於 O 背向道路的一側，如圖所示。於是在三角形 AOO' 中，有 $OA = R+w$、$OO' = d$、$O'A = R+d$，而在 O 的角是 $\pi-\alpha$（它與 $\angle AOM = \alpha$ 互補（supplementary））。在 O' 的角是 $\frac{1}{2}\angle AO'B = \theta$，所以在 A 的角是 $\pi - (\pi-\alpha) - \theta = \alpha - \theta$。



(a) 在三角形 AOO' 中運用餘弦定理，並利用 $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$，得

$$\begin{aligned}(R+d)^2 &= (R+w)^2 + d^2 + 2(R+w)d\cos\alpha\\ R^2 + 2Rd &= R^2 + 2Rw + w^2 + 2(R+w)d\cos\alpha\\ 2d\big(R - (R+w)\cos\alpha\big) &= w(2R+w),\end{aligned}$$

所以

$$d = \frac{w(2R+w)}{2\big(R-(R+w)\cos\alpha\big)}.$$

由第 (i) 部分可知分母中的括號是正數，所以這是一個合理的正長度。

(b) 在同一個三角形中運用正弦定理，把角 $\alpha-\theta$（對邊為 $OO' = d$）與角 $\pi-\alpha$（對邊為 $O'A = R+d$）配對，得

$$\frac{\sin(\alpha-\theta)}{d} = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{R+d} \quad\Longrightarrow\quad \sin(\alpha-\theta) = \frac{d\sin\alpha}{R+d}.$$

第 (iii) 部分

記 $\varepsilon = w/R$，於是 $0 < \varepsilon \ll 1$。把 (a) 的結果除以 R，

$$\frac{d}{R} = \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2\big(1-(1+\varepsilon)\cos\alpha\big)}.$$

由於 $\cos\alpha \le \frac{1}{2}$，分母至少是 $2\big(1-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\big) = 1-\varepsilon$，所以

$$0 < \frac{d}{R} \le \frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{1-\varepsilon} \approx 2\varepsilon,$$

這遠小於 1。（準確至一階，$d/R \approx \varepsilon/(1-\cos\alpha)$。）

想一想 正弦值很小，只告訴我們該角接近 0 或接近 π。究竟是哪一個？

由 (b)，$0 < \sin(\alpha-\theta) = \dfrac{(d/R)\sin\alpha}{1+d/R} < \dfrac{d}{R}$，這是很小的。角 $\alpha-\theta$ 是三角形 AOO' 的一個內角，所以是正數；又因為 $\theta > 0$，它小於 $\alpha \le \frac{1}{2}\pi$。在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上，正弦函數是遞增的，且 $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$，所以 $\alpha-\theta \le \frac{\pi}{2}\sin(\alpha-\theta) < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{R}$，這同樣遠小於 1。

第 (iv) 部分

我的朋友沿外邊緣騎行，那是一段半徑為 $R+w$、在 O 所對的角為 2α 的圓弧，所以他們的路線長度是 $L = 2\alpha(R+w)$。我的路線是半徑為 $R+d$ 的圓弧，位於 AB 背向 O' 的一側；它在 O' 所對的角為 2θ，所以長度是 $2\theta(R+d)$。因此

$$\begin{aligned} S &= 2\alpha(R+w) - 2\theta(R+d) \\ &= 2(R+d)(\alpha-\theta) + 2\alpha(R+w) - 2\alpha(R+d) \\ &= 2(R+d)(\alpha-\theta) + 2\alpha(w-d), \end{aligned}$$

正是所求（我們加上又減去了 $2\alpha(R+d)$）。

近似。現在我們準確至 ε 的一階，忽略相對於所保留各項而言為 ε^2 階的項。由 (iii)，$\alpha-\theta$ 很小，所以 $\alpha-\theta \approx \sin(\alpha-\theta)$，誤差為 $(\alpha-\theta)^3$ 階。由 (b)，

$$2(R+d)(\alpha-\theta) \approx 2(R+d)\cdot\frac{d\sin\alpha}{R+d} = 2d\sin\alpha.$$

因此

$$S \approx 2d\sin\alpha + 2\alpha w - 2\alpha d = 2\alpha w - 2d(\alpha-\sin\alpha).$$

現在利用 (iii) 中的 $d \approx \dfrac{w}{1-\cos\alpha}$：

$$S \approx 2w\left(\alpha - \frac{\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = 2w\cdot\frac{\alpha-\alpha\cos\alpha-\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2w(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}.$$

最後，$L = 2\alpha R(1+\varepsilon) \approx 2\alpha R$；由於 S 本身已經是 ε 的一階量，把 L 換成 $2\alpha R$ 只會在二階上改變 S/L。所以

$$\frac{S}{L} \approx \left(\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha(1-\cos\alpha)}\right)\frac{w}{R},$$

這就是所求的比例。

驗算

- 當 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ 時，該比例是 $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{w}{R} \approx 0.637\,\frac{w}{R}$；當 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ 時，約為 $0.654\,\frac{w}{R}$。兩者都是正數，這是必然的，因為 $\tan\alpha > \alpha$ 給出 $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$。
- 取 $R = 1$、$w = 0.01$、$\alpha = \frac{1}{2}\pi$：精確公式給出 $d \approx 0.01005$、$\alpha - \theta \approx 0.00995$ 及 $S/L \approx 0.006285$，而近似值是 0.006366。相對誤差約為 1%，屬於 w/R 的量級，理應如此；當 w 除以十時，誤差亦縮小至十分之一。
- 一項電腦驗算把 A 和 B 放在坐標上，直接求出相切的圓，並以數千組隨機選取的 R、w 和 α 證實了 d、$\sin(\alpha-\theta)$ 和 S 的公式。

常見錯誤

- 把距離取為 $OO' = R + d + R$ 或 $OO' = w$：兩圓是內切，所以圓心之間的距離是半徑之差，即 d。
- 在三角形 AOO' 中，對於在 O 的角錯用了 $\cos\alpha$ 而不是 $\cos(\pi-\alpha)$，這會令最後一項的正負號倒轉。
- 在 (iii) 中只說 $\sin(\alpha-\theta)$ 很小：你還需要 $\alpha - \theta$ 位於 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 內，才可以斷定角本身很小。

STEP 之外

「遠小於 1」是微擾理論（perturbation theory）的語言：以一個小參數 ε 展開，保留首項，並確保誤差確實是更高階的。在大學裏，這會借助泰勒定理（Taylor's theorem）和大 O 記號（big-O notation）嚴格化；在本題中，它會顯示 S/L 等於所給比例乘以 ε，再加上一個 ε^2 階的項。關於帶餘項的泰勒定理的嚴謹論述，可參看 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；如想做更多同類風格的題目，可參看 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學題集》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。