詳細解答

STEP II 2021，第 5 題

純數學 • 一階微分方程

> **STEP II 2021，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分是一條一階 (first-order) 微分方程，它既不是可分離變量 (separable) 的，也不是一眼就能看出、形式友善的線性 (linear) 方程；但題目建議的代換 (substitution) 能把它化為可以直接積分的方程。第 (ii) 部分看似是幾何題，可是一旦寫出切線 (tangent) 方程，並要求它通過 $(1, t)$，得到的正是第 (i) 部分中 $a = 1$ 的方程。之後的草圖可由導數（derivative）得出，而導數原來出奇地簡單。

解答

第 (i) 部分

方程只在 $x \neq a$ 時才有意義，所以我們在 $x > a$ 或 $x < a$ 的某個區間上處理。設 $y = (x-a)u$，由乘積法則（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + (x-a)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

代入方程，

$$(x-a)u + (x-a)^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (x-a)u - x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{(x-a)^2}.$$

含 u 的項互相抵消，這正是這個代換的用意所在。把 x 寫成 $x = (x-a) + a$，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x-a} - \frac{a}{(x-a)^2}, \qquad \text{故} \qquad u = -\ln|x-a| + \frac{a}{x-a} + c$$

其中 c 為常數。兩邊乘以 $x-a$，

$$\boxed{y = a + (x-a)(c - \ln|x-a|)}$$

其中常數 c 在 $x = a$ 兩側可以不同。

驗證：$y' = c - \ln|x-a| - 1$，所以 $(x-a)y' = (y-a) - (x-a) = y - x$，符合要求。

第 (ii) 部分

在 $(t, \mathrm{f}(t))$ 處的切線為 $y = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(x-t)$。它通過 $(1,t)$ 當且僅當

$$t = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(1-t), \qquad \text{即} \qquad (t-1)\,\mathrm{f}'(t) = \mathrm{f}(t) - t.$$

把 t 改記為 x，這就是第 (i) 部分中 $a = 1$ 的方程，在 $x \neq 1$ 時成立。因此在 $x < 1$ 和 $x > 1$ 上分別有

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)(c - \ln|x-1|),$$

而常數須在兩側各自確定。

> ? **想一想** 為甚麼單憑一個條件，例如 $\mathrm{f}(0) = 0$，不能確定整條曲線在所有 x 上的形狀？

方程在 $x = 1$ 處不提供任何資訊，所以 $x < 1$ 上的解與 $x > 1$ 上的解互不相關。這就是題目為每一小題分別給出條件的原因。

(a) 當 $x < 1$ 時，$|x-1| = 1 - x$。由條件 $\mathrm{f}(0) = 0$ 得 $0 = 1 + (-1)(c - \ln 1) = 1 - c$，故 $c = 1$，且

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)(1 - \ln(1-x)) \quad (x < 1).}$$

求導，$\mathrm{f}'(x) = 1 - \ln(1-x) + (x-1)\cdot\dfrac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$。因此：

- 只有當 $1 - x = 1$ 時 $\mathrm{f}'(x) = 0$，所以唯一的駐點（stationary point）是 $(0,0)$。由於當 $x < 1$ 時 $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{1}{1-x} > 0$，曲線是凸（convex）的，而 $(0,0)$ 是極小值（minimum）點。所以 $\mathrm{f}(x) \geq 0$，曲線在原點恰好與 x 軸相切。
- 當 $x \to 1^-$ 時，設 $z = x - 1 \to 0$：利用 $z\ln|z| \to 0$，得 $\mathrm{f}(x) = 1 + z - z\ln|z| \to 1$。斜率（gradient）$-\ln(1-x) \to +\infty$，所以曲線趨向 $(1,1)$，並在該處變為鉛垂。
- 當 $x \to -\infty$ 時，$x - 1$ 和 $1 - \ln(1-x)$ 都是絕對值很大的負數，所以 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$。

一些有用的點：$\mathrm{f}(1-\mathrm{e}) = 1$ 及 $\mathrm{f}(-1) = 2\ln 2 - 1 \approx 0.39$。

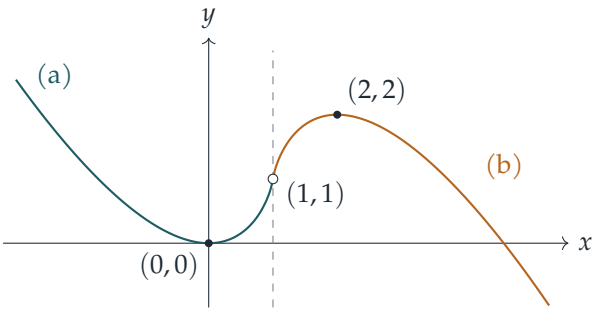
(b) 當 $x > 1$ 時，$|x-1| = x - 1$。由條件 $\mathrm{f}(2) = 2$ 得 $2 = 1 + 1\cdot(c - 0)$，所以同樣有 $c = 1$，且

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)\big(1 - \ln(x-1)\big) \quad (x > 1), \qquad \mathrm{f}'(x) = -\ln(x-1).$$

- 唯一的駐點在 $x = 2$，即 $(2, 2)$。這裏 $\mathrm{f}''(x) = -\dfrac{1}{x-1} < 0$，所以曲線是凹（concave）的，而 $(2, 2)$ 是極大值（maximum）點。
- 當 $x \to 1^+$ 時，（由同一極限）$\mathrm{f}(x) \to 1$，且 $\mathrm{f}'(x) \to +\infty$：曲線以鉛垂方向離開 $(1, 1)$。
- 當 $x \to \infty$ 時，$1 - \ln(x-1) \to -\infty$，所以 $\mathrm{f}(x) \to -\infty$。曲線通過 $(1 + \mathrm{e}, 1)$，並在 $x \approx 4.59$ 附近與 x 軸相交一次。

想一想 做完 (a) 之後，有沒有更快捷的方法看出 (b) 的形狀？

有。設 $s = |x - 1|$，則 (a) 中的分支為 $\mathrm{f}(1 - s) = 1 - s(1 - \ln s)$，而 (b) 中的分支為 $\mathrm{f}(1 + s) = 1 + s(1 - \ln s)$。所以 $\mathrm{f}(1 + s) - 1 = -\big(\mathrm{f}(1 - s) - 1\big)$：(b) 的分支就是 (a) 的分支繞 $(1, 1)$ 旋轉半周所得。極小值點 $(0, 0)$ 被映射到極大值點 $(2, 2)$。



曲線在 $x = 1$ 處沒有定義（空心圓點），但兩條分支都以鉛垂切線趨近 $(1, 1)$。

驗算

- 直接檢驗切線性質。在 $t = 0$ 處，切線是水平的 $y = 0$，它確實通過 $(1, 0)$。在 $t = 2$ 處，切線是 $y = 2$，它通過 $(1, 2)$。
- 在 $t = -1$ 處：$\mathrm{f}(-1) \approx 0.386$，$\mathrm{f}'(-1) = -\ln 2 \approx -0.693$。切線在 $x = 1$ 處的高度為 $0.386 + 2(-0.693) \approx -1.000$，等於 t。
- 對稱性驗算：對每個 $s > 0$ 都有 $\mathrm{f}(1 + s) + \mathrm{f}(1 - s) = 2$，例如 $\mathrm{f}(4) + \mathrm{f}(-2) = (4 - 3\ln 3) + (3\ln 3 - 2) = 2$。

常見錯誤

- 忘記在 $\ln|x - a|$ 中加上絕對值（modulus），以致在第 (a) 部分無法處理 $x < 1$ 的情況。

- 以為 (a) 中求得的常數自動適用於 $x > 1$。這裏碰巧得出相同的值，但必須用 $f(2) = 2$ 加以驗證。
- 斷定當 $x \to 1$ 時 $f(x) \to 0$ 或趨於無窮。$(x-1)\ln|x-1|$ 這一項趨向 0，所以 $f \to 1$。趨於無窮的是斜率。

STEP 之外

把原點移到 $x = a$、$y = a$ 之後，方程 $(x-a)y' = y - x$ 就是齊次（homogeneous）方程：設 $X = x - a$ 及 $Y = y - a$，方程變為 $XY' = Y - X$。代換 $Y = Xu$ 正是解齊次方程的標準方法。使 y' 的係數為零的點 $x = a$ 是一個奇點（singular point），而奇點兩側的解之間可以毫無關係。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）對這兩個概念都有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。