詳細解答

STEP II 2021，第 4 題

純數學 • Lambert W 函數

STEP II 2021，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 3.9 節創造一個新函數中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/lambert-w.html

關鍵思路

函數 g 是 xe^x 的逆運算，所以整道題的重點就是把每條方程重新整理成 $ue^u = c$ 的形式，其中 u 是某個新變量。一旦化成這個形式，第 (i) 部分的草圖就告訴我們一切：若 $c < -\frac{1}{e}$，則無解；若 $-\frac{1}{e} < c < 0$，則有兩個解，而 g 永遠只會選出滿足 $u \geq -1$ 的那一個。至於對數（logarithm），則以代換 $x = e^u$ 處理。

解答

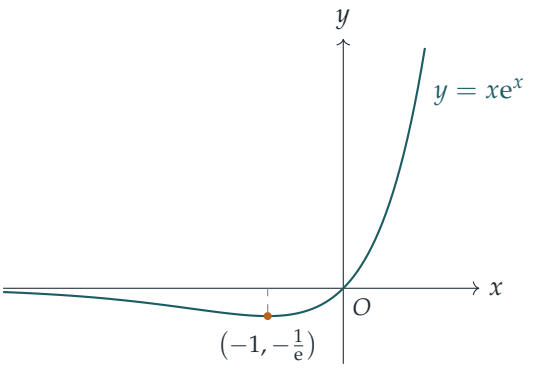
第 (i) 部分

設 $y = xe^x$。由乘積法則（product rule），

$$\frac{dy}{dx} = (1+x)e^x,$$

由於 $e^x > 0$，這個導數（derivative）只在 $x = -1$ 處為零。當 $x < -1$ 時斜率（gradient）為負，當 $x > -1$ 時斜率為正，所以唯一的駐點（stationary point）是位於 $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ 的極小點（minimum）。

曲線的正負號與 x 相同，並且通過原點。當 $x \to \infty$ 時，$y \to \infty$，而且增長得很快。當 $x \to -\infty$ 時，e^x 壓倒 x，所以 $y \to 0$，並從下方趨近：負 x 軸是一條漸近線（asymptote）。



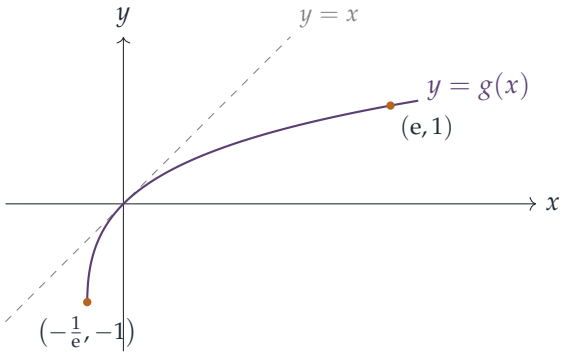
第 (ii) 部分

要 f 有反函數（inverse function），它在 $[a,\infty)$ 上必須是一一對應（one-to-one）的。若 $a<-1$，區間包含了 $x=-1$ 附近極小點兩側的點；由於 f 是連續的，並在 $(-\infty,-1]$ 上嚴格遞減、在 $[-1,\infty)$ 上嚴格遞增（strictly increasing），某個略大於 $-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 的值會被取到兩次。若 $a\geq -1$，則 f 嚴格遞增，因此是一一對應的。所以最小的可能值是

$$a=-1.$$

這時 f 把 $[-1,\infty)$ 映射到 $[-\frac{1}{\mathrm{e}},\infty)$ 上，所以 g 的定義域（domain）是 $[-\frac{1}{\mathrm{e}},\infty)$，值域（range）是 $[-1,\infty)$。

g 的圖像是第 (i) 部分右邊那一支沿直線 $y=x$ 的反射。它從 $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},-1\right)$ 開始，在該處有一條鉛垂切線（vertical tangent）（即極小點處水平切線的反射），然後通過原點，在原點的斜率是 1（因為 $f'(0)=1$），之後遞增得越來越慢：$g(\mathrm{e})=1$，而當 x 很大時，$g(x)$ 比 $\ln x$ 增長得更慢。



第 (iii) 部分會反覆用到兩個事實。對於 $c\geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$，$u=g(c)$ 是方程 $u\mathrm{e}^u=c$ 滿足 $u\geq -1$ 的那個解。另外，由第 (i) 部分的草圖可知，方程 $u\mathrm{e}^u=c$

- 若 $c<-\frac{1}{\mathrm{e}}$，則沒有實數解；

- 若 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$，則有兩個實數解，分別是 $g(c) \in (-1, 0)$ 和另一個小於 -1 的解；
- 若 $c \geq 0$，則恰有一個實數解 $g(c)$（因為當 $u < 0$ 時，左邊是負數）。

第 (iii) 部分

(a) 兩邊乘以 e^x（它永不為零），得

$$x\mathrm{e}^x = \tfrac{1}{5}.$$

由於 $\frac{1}{5} > 0$，恰有一個實根：

$$x = g\left(\tfrac{1}{5}\right).$$

(b) 要 $\ln x$ 有定義，須有 $x > 0$，所以設 $x = \mathrm{e}^u$，其中 $u = \ln x$ 為實數。方程變成

$$2u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{2}.$$

但對所有 u 都有 $u\mathrm{e}^u \geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$，而由於 $\mathrm{e} > 2$，所以 $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{\mathrm{e}}$。因此沒有實根。

(c) 同樣設 $x = \mathrm{e}^u$，

$$3u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{3}.$$

由於 $\mathrm{e} < 3$，所以 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$，因此 u 有兩個值，從而（因為 $u \mapsto \mathrm{e}^u$ 是一一對應的）x 有兩個實根。其中一個是

$$x = \mathrm{e}^{g(-1/3)}.$$

> ? **想一想** 這是較大的根還是較小的根？

u 的另一個值小於 -1，而 $g(-\frac{1}{3}) > -1$。由於 e^u 隨 u 遞增，根 $\mathrm{e}^{g(-1/3)}$ 是兩個根中較大的一個。

(d) 同樣有 $x > 0$。取指數，$x = 3\ln x \iff \mathrm{e}^{x/3} = x \iff x\mathrm{e}^{-x/3} = 1$。要得到 $u\mathrm{e}^u$ 的形式，前面的乘數必須與指數相配，所以設 $u = -\frac{x}{3}$，並兩邊乘以 $-\frac{1}{3}$：

$$\left(-\frac{x}{3}\right)\mathrm{e}^{-x/3} = -\frac{1}{3}.$$

與 (c) 一樣，$-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$，所以 u 有兩個值，兩者都是負數，從而得到兩個正根 $x = -3u$。其中一個根是

$$x = -3\,g\left(-\tfrac{1}{3}\right).$$

這次映射 $u \mapsto x = -3u$ 是遞減的。u 的另一個值小於 -1，所以另一個根大於 3，而我們求得的根滿足 $x = -3g(-\frac{1}{3}) < 3$。因此我們求得的根是兩者中較小的一個。

第 (iv) 部分

由於 $x > 0$，取對數：$x^x = 10 \iff x \ln x = \ln 10$。設 $x = \mathrm{e}^u$：

$$u\mathrm{e}^u = \ln 10.$$

由於 $\ln 10 > 0$，這方程只有一個解 $u = g(\ln 10)$，所以根是

$$x = \mathrm{e}^{g(\ln 10)}.$$

（等價地，由於當 $c \neq 0$ 時 $\mathrm{e}^{g(c)} = c/g(c)$，根也可寫成 $\dfrac{\ln 10}{g(\ln 10)}$。）

驗算

- 數值上，$g(-\frac{1}{3}) \approx -0.6191$。在 (c) 中，這給出 $x \approx 0.5384$，而 $3(0.5384)\ln(0.5384) \approx -1.000$；另一個根約為 0.2204，確實較小。
- 在 (d) 中，$x \approx 1.8572$，而 $3\ln 1.8572 \approx 1.8572$；另一個根約為 $4.536 > 3$，與預測相符。
- 在 (iv) 中，$g(\ln 10) \approx 0.9188$，所以 $x \approx 2.5062$，而 $2.5062^{2.5062} \approx 10.00$。
- 在 (b) 中，$2x \ln x + 1$ 的最小值是 $1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0.264 > 0$（在 $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 處取得），證實沒有根。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分取 $a = 0$，因為曲線在那裏「看起來」是一一對應的：其實轉向點（turning point）在 $x = -1$，而不在原點。
- 在 (d) 中忘記整條式乘以 $-\frac{1}{3}$，以致前面的因子與指數不相配，無法應用 g。
- 以為經 g 求得的根總是較大的那個：在 (c) 中確是如此，因為 $x = \mathrm{e}^u$ 隨 u 遞增；但在 (d) 中並非如此，因為 $x = -3u$ 把次序倒轉了。

STEP 之外

函數 g 是 *Lambert W* 函數（Lambert W function）的主支（principal branch），通常記作 W_0；當 $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$ 時，$u\mathrm{e}^u = c$ 的另一個解來自第二個分支 W_{-1}。凡是未知數同時出現在指數函數之內和之外的地方，它都會出現：例如延遲微分方程（delay differential equations）、組合數學（combinatorics）（計算標號樹（labelled trees）的數目）以及物理學。把反函數延拓越過它不再一一對應的那一點，正是複分析（complex analysis）中

分支與分支點（branch points）理論的起點；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）是初次接觸這些概念的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。