詳細解答

STEP II 2021，第 3 題

純數學 • 整數部分與小數部分

STEP II 2021，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

每個實數都可以唯一地分拆成一個整數部分（integer part）和一個位於 $[0,1)$ 的小數部分（fractional part）。所以當一條方程說「一個整數加上一個 $[0,1)$ 中的數等於 4.9」時，兩部分都被確定了：整數必定是 4，小數部分必定是 0.9。在 (ii) 和 (iii) 中，各方程互相糾纏，但把三條方程相加，就能讓每個 $\lfloor t\rfloor + \{t\}$ 重新組合成 t。這樣便得到一條簡潔的線性方程（linear equation），再從它減去每條原方程，就能把未知數分離成正好是「整數加小數部分」的形式。

解答

以下一直會用到：若 n 是整數，$0 \le f < 1$ 且 $n + f = c$，則 $n = \lfloor c\rfloor$ 及 $f = \{c\}$。這是因為 $n \le c < n+1$，從而 n 被確定為不超過 c 的最大整數。

第 (i) 部分

在第一條方程中，$\lfloor x\rfloor$ 是整數而 $0 \le \{y\} < 1$，所以

$$\lfloor x\rfloor = 4, \qquad \{y\} = 0.9.$$

在第二條方程中，$\lfloor y\rfloor$ 是整數而 $0 \le \{x\} < 1$，所以 $\lfloor y\rfloor = \lfloor -1.4\rfloor = -2$ 及 $\{x\} = -1.4 - (-2) = 0.6$。因此

$$x = 4 + 0.6 = 4.6, \qquad y = -2 + 0.9 = -1.1.$$

它們滿足兩條方程（$4 + 0.9 = 4.9$ 及 $0.6 - 2 = -1.4$），而我們已證明這是唯一的解。

第 (ii) 部分

把三條方程相加。x、y、z 各自單獨出現一次，另外又以 $\lfloor\cdot\rfloor+\{\cdot\}$ 的形式分拆在兩條不同的方程中出現一次：

$$(x+y+z)+(\{x\}+\lfloor x\rfloor)+(\lfloor y\rfloor+\{y\})+(\{z\}+\lfloor z\rfloor)=3.9+5.3+5,$$

即 $2(x+y+z)=14.2$，所以

$$x+y+z=7.1.$$

? **想一想** 既然已知 $x+y+z$，從中減去其中一條原方程後，還剩下甚麼？

從 $x+y+z=7.1$ 減去第一條方程，x 被消去，剩下 $y-\lfloor y\rfloor$ 和 $z-\{z\}$：

$$\{y\}+\lfloor z\rfloor=7.1-3.9=3.2,$$

這正是所求的結果。同樣地，減去第二和第三條方程，得

$$\lfloor x\rfloor+\{z\}=7.1-5.3=1.8,\qquad \{x\}+\lfloor y\rfloor=7.1-5=2.1.$$

每條都是「整數加小數部分」的形式，所以

$$\begin{aligned}\lfloor z\rfloor&=3, & \{y\}&=0.2,\\ \lfloor x\rfloor&=1, & \{z\}&=0.8,\\ \lfloor y\rfloor&=2, & \{x\}&=0.1.\end{aligned}$$

因此 $x=1.1$、$y=2.2$、$z=3.8$。這是唯一可能的解，而且確實成立：

$$1.1+2+0.8=3.9,\qquad 0.1+2.2+3=5.3,\qquad 1+0.2+3.8=5.$$

第 (iii) 部分

同樣的技巧依然奏效。把三條方程相加，並利用 $2\lfloor y\rfloor+2\{y\}=2y$，

$$2x+4y+2z=14.2,\qquad \text{所以}\qquad x+2y+z=7.1.$$

從這條方程依次減去每條原方程，得

$$2\{y\}+\lfloor z\rfloor=3.2,\qquad \lfloor x\rfloor+\{z\}=1.8,\qquad \{x\}+2\lfloor y\rfloor=2.1.$$

中間那條是熟悉的類型，所以 $\lfloor x\rfloor=1$ 及 $\{z\}=0.8$。

在第三條方程中，$2\lfloor y\rfloor$ 仍然是整數而 $0\le\{x\}<1$，所以先前的推理仍然適用：$2\lfloor y\rfloor=2$ 及 $\{x\}=0.1$。因此 $\lfloor y\rfloor=1$ 及 $x=1.1$。

想一想 第一條方程是否仍然確定唯一的答案？

不是。這裏 $2\{y\}$ 位於 $[0,2)$ 而非 $[0,1)$，所以把 3.2 寫成一個整數加上一個 $[0,2)$ 中的數，共有兩種方法：

- $\lfloor z\rfloor = 3$，$2\{y\} = 0.2$，所以 $\{y\} = 0.1$；
- $\lfloor z\rfloor = 2$，$2\{y\} = 1.2$，所以 $\{y\} = 0.6$。

（若 $\lfloor z\rfloor \geq 4$，則 $2\{y\} < 0$；若 $\lfloor z\rfloor \leq 1$，則 $2\{y\} \geq 2.2$；兩者皆不可能。）配合 $\lfloor y\rfloor = 1$ 及 $\{z\} = 0.8$，得到兩個候選解：

$$(x,y,z) = (1.1,\ 1.1,\ 3.8) \qquad 或 \qquad (x,y,z) = (1.1,\ 1.6,\ 2.8).$$

兩者都滿足原方程組：

$$\begin{aligned}(1.1,1.1,3.8):&\quad 1.1+2+0.8=3.9,\quad 0.1+2.2+3=5.3,\quad 1+0.2+3.8=5;\\ (1.1,1.6,2.8):&\quad 1.1+2+0.8=3.9,\quad 0.1+3.2+2=5.3,\quad 1+1.2+2.8=5.\end{aligned}$$

所以 (iii) 中的方程組恰好有這兩個解。

驗算

如上所示，把答案代回原方程：每條方程兩邊都相等。作為獨立的驗算，用電腦讓 x 和 y 取遍 $[-10,10]$ 中所有 0.1 的倍數進行搜尋，結果 (i) 恰有一個解，(ii) 恰有一個解，而 (iii) 恰有上述兩個解。留意對於 (ii) 的解，$\{y\} + \lfloor z\rfloor = 0.2 + 3 = 3.2$，與預期相符。

常見錯誤

- 算錯負數的下取整（floor）：$\lfloor -1.4\rfloor = -2$，而不是 -1，所以 (i) 中 $\{x\} = 0.6$。
- 在 (iii) 中誤以為 $2\{y\}$ 是一個小數部分，因而只找到一個解。它其實位於 $[0,2)$，這正是第二個解出現的原因。
- 沒有把候選解代回原方程檢驗。上面的推導只證明了它們是僅有的可能。

STEP 之外

把 x 寫成 $x = \lfloor x\rfloor + \{x\}$，等同於在模（modulo）1 之下運算：小數部分就是 x 在圓 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的像。下取整和小數部分在數論（number theory）中無處不在，例如計算整除 $n!$ 的質數（prime）最高次冪的勒讓德（Legendre）公式，以及研究當 α 為無理數（irrational

number）時，$n\alpha$ 的小數部分如何在 $[0,1)$ 上分佈。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是這一系列概念的一本絕佳入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。