詳細解答

STEP II 2021，第 2 題

純數學 • 根的對稱函數

> **STEP II 2021，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

兩個數的冪和（sums of powers）完全由兩個量決定：它們的和與積。一旦知道 $a+b$ 和 a^2+b^2，積 ab 便隨之確定，a^3+b^3 亦然；這就是第 (i) 部分中的約束條件。第 (iii) 部分運用同一事實，只是把 c「移除」：從三個變量的和中分別減去 c、c^2、c^3，便剩下兩個變量的和，而第 (i) 部分的約束條件就變成 c 必須滿足的一條三次方程（cubic equation）。

解答

第 (i) 部分

由 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ 得 $p^2 = q+2ab$，所以

$$ab = \frac{p^2-q}{2}.$$

現在利用因式分解（factorisation）$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$：

$$\begin{aligned} r = a^3+b^3 &= p^3 - 3p\cdot\frac{p^2-q}{2} \\ &= \frac{2p^3-3p^3+3pq}{2} = \frac{3pq-p^3}{2}. \end{aligned}$$

因此 $3pq-p^3 = 2r$，得證。留意以上推導完全沒有用到 p、q、r 是實數（real）這一點：此恆等式對任何複數（complex）a 和 b 均成立。我們在第 (iii) 部分會用到這一點。

第 (ii) 部分

二次方程（quadratic）$2x^2-2px+(p^2-q)=0$ 總有兩個根（可能相等，也可能不是實數），由二次公式（quadratic formula）給出。把它們記為 a 和 b。兩邊除以 2，二次式

為 $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$，所以

$$a + b = p, \qquad ab = \frac{p^2 - q}{2}.$$

這直接給出 $(*)$ 中的第一條方程。然後

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = p^2 - (p^2 - q) = q,$$

這是第二條；而

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = p^3 - \frac{3p(p^2-q)}{2} = \frac{3pq - p^3}{2} = r,$$

最後一步用了假設 $3pq - p^3 = 2r$。所以 $(*)$ 中三條方程全部成立。

選取這條二次方程並非碰運氣：第 (i) 部分已告訴我們 ab 必須是甚麼，而兩根之和為 p、積為 $\frac{1}{2}(p^2 - q)$ 的二次式，正正就是 $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$。

第 (iii) 部分

設

$$p = a + b = s - c, \qquad q = a^2 + b^2 = t - c^2, \qquad r = a^3 + b^3 = u - c^3.$$

想一想 第 (i) 部分假設了 p、q、r 是實數，但這裏它們涉及 c，而 c 可能是複數。我們仍然可以使用第 (i) 部分的結果嗎？

可以：正如第 (i) 部分末尾所指出，那裏的論證純粹是代數運算，從未用到實數性。所以 $3pq - p^3 = 2r$，即

$$3(s-c)(t-c^2) - (s-c)^3 = 2(u - c^3).$$

展開，

$$3(s-c)(t-c^2) = 3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3,$$
$$(s-c)^3 = s^3 - 3s^2c + 3sc^2 - c^3,$$

所以方程變為

$$3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3 - s^3 + 3s^2c - 3sc^2 + c^3 = 2u - 2c^3.$$

按 c 的冪次合併：

$$6c^3 - 6sc^2 + 3(s^2 - t)c + 3st - s^3 - 2u = 0.$$

所以 c 是 $6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 0$ 的一個根，得證。

係數只取決於 s、t、u，而它們對 a、b、c 是對稱（symmetric）的。以 a（或 b）代替 c 的角色重複上述論證，可知 a 和 b 也是根。所以另外兩個根就是 a 和 b。

想一想 為何 a、b、c 互不相同這一點很重要？

三次方程最多只有三個根。由於 a、b、c 是三個不同的根，它們就是全部的根，而且每個都是單根（simple root），所以

$$6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 6(x-a)(x-b)(x-c).$$

（假如例如 $a = b$，我們便只知道兩個根，無法確定第三個。）比較常數項（constant term），得 $3st - s^3 - 2u = -6abc = -6v$，即

$$s^3 - 3st + 2u = 6v.$$

第 (iv) 部分

這裏 $s = 3$、$t = 1$、$u = -3$、$v = 2$。首先檢查一致性：第 (iii) 部分的條件為 $27 - 9 - 6 = 12 = 6 \times 2$，所以成立。第 (iii) 部分指出 a、b、c 應是

$$6x^3 - 18x^2 + 3(9-1)x + 9 - 27 + 6 = 6x^3 - 18x^2 + 24x - 12 = 0,$$

的根，即 $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ 的根。由於 $x = 1$ 代入得 $1 - 3 + 4 - 2 = 0$，

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 - 2x + 2) = (x-1)((x-1)^2 + 1),$$

所以根為 1、$1 + \mathrm{i}$、$1 - \mathrm{i}$。取

$$a = 1, \qquad b = 1 + \mathrm{i}, \qquad c = 1 - \mathrm{i}.$$

第 (iii) 部分只告訴我們該往哪裏找，所以現在必須驗證：

- $a + b + c = 1 + (1 + \mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i}) = 3$；
- $(1 + \mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ 及 $(1 - \mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$，所以 $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 2\mathrm{i} = 1$；
- $(1+\mathrm{i})^3 = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -2 + 2\mathrm{i}$ 及 $(1-\mathrm{i})^3 = -2\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) = -2 - 2\mathrm{i}$，所以 $a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 4 = -3$；
- $abc = 1 \cdot (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 1 \cdot 2 = 2$。

(**) 中四條方程全部成立。（這三個數的任何排列都同樣適用。）

驗算

- 第 (i) 部分取 $a = 1$、$b = 2$：$p = 3$、$q = 5$、$r = 9$，而 $3pq - p^3 = 45 - 27 = 18 = 2r$。

- 第 (iii) 部分取 $a,b,c = 1,2,3$：$s = 6$、$t = 14$、$u = 36$、$v = 6$，而 $s^3 - 3st + 2u = 216 - 252 + 72 = 36 = 6v$。三次式為 $6x^3 - 36x^2 + 66x - 36 = 6(x-1)(x-2)(x-3)$，與預期相符。
- 第 (i)–(iii) 部分的恆等式亦已用電腦對大量隨機複數 a、b、c 作驗證。

常見錯誤

- 在第 (iii) 部分直接說「a 和 b 是另外兩個根」，卻沒有指出三次式的係數對 a、b、c 是對稱的。
- 由根之積推出 $s^3 - 3st + 2u = 6v$，卻沒有利用三數互不相同來確定 a、b、c 就是全部的根。
- 在第 (iv) 部分只求出三次方程的根便停下：題目要求你明確驗證四條方程。

STEP 之外

這道題是牛頓恆等式（Newton's identities）的一個小特例。牛頓恆等式把冪和 $a^k + b^k + c^k$ 與初等對稱函數（elementary symmetric functions）$a+b+c$、$ab+bc+ca$、abc 聯繫起來。對稱多項式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）指出，每個對稱多項式都可以用初等對稱多項式表示，而這正是伽羅瓦理論（Galois theory）的起點。如欲深入了解，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《環、域與羣》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。