詳細解答

STEP II 2021，第 12 題

概率與統計 • 賭徒破產問題

> **STEP II 2021，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

每場比賽都會不斷回到之前出現過的局面。因此，我們不去把無窮多種獲勝方式逐一加起來，而是設 P 為從該局面出發獲勝的概率（probability），再按下一步發生的事情作條件分析（conditioning），得出一條 P 同時出現在兩邊的方程。同樣的技巧用在謹慎玩法上，就能把它化為第 (ii) 部分的比賽。

解答

第 (i) 部分

設 P 為 A 贏得整場比賽的概率。按第一局的結果作條件分析。A 以概率 p_{A} 贏得該局，比賽隨即結束。B 以概率 p_{B} 贏得該局，A 便輸了。否則該局打和，概率為 $1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}}$；由於各局相互獨立（independent），比賽重新開始，所以 A 從該處獲勝的機會仍然是 P。因此

$$P = p_{\mathrm{A}} + (1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})P \quad\Longrightarrow\quad (p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}})P = p_{\mathrm{A}} \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{p_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}}},$$

這裏兩邊除以 $p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}} > 0$。（等價地，A 在第 k 局獲勝的概率為 $(1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})^{k-1}p_{\mathrm{A}}$，而由於 $0 < p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}} < 1$，這個幾何級數（geometric series）收斂。）

第 (ii) 部分

設 D 為進行若干局後 A 的勝局數減去 B 的勝局數。每一局使 D 改變 $+1$ 或 -1，而比賽在首次出現 $|D| = 2$ 時結束。

長度爲偶數。進行 n 局後，若 A 勝 a 局、B 勝 b 局，則 $a+b=n$ 且 $D=a-b=n-2b$，

所以 D 與 n 的奇偶性（parity）相同。比賽在 $D = \pm 2$ 時結束，而這是偶數，所以 n 是偶數。

概率。把各局兩兩成對來看。比賽開始時雙方打平（$D = 0$），而由於比賽只能在偶數局後結束，每一對未能結束比賽的局之後，雙方又會再次打平。從打平的局面出發，接下來兩局是 AA 的概率為 p^2（A 勝），是 BB 的概率為 q^2（B 勝），是 AB 或 BA 的總概率為 $2pq$，此時比賽再次打平。設 P 為 A 從打平局面出發獲勝的概率，則

$$P = p^2 + 2pq\,P \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{p^2}{1-2pq}.$$

由於 $p + q = 1$，有 $1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$，所以 $1 - 2pq = p^2 + q^2$，且

$$P = \frac{p^2}{p^2+q^2},$$

即為所求。這裏 $p^2 + q^2 > 0$，所以除法沒有問題。

第 (iii) 部分

謹慎玩法。籌碼數目每輪增加或減少一個，由 1 開始，到 0（輸）或 4（贏）時停止。它不能跳過 4，所以玩家獲勝當且僅當籌碼數目先到達 4 而不是先到達 0。

> **想一想** 從 2 個籌碼出發，玩家需要做到甚麼？我們以前見過這種情況嗎？

從 2 個籌碼出發，玩家要在輸的輪數比贏的輪數多出兩輪（到達 0）之前，先做到贏的輪數比輸的輪數多出兩輪（到達 4），才能獲勝。這正是第 (ii) 部分的比賽，其中玩家是 A，碰運氣的遊戲是 B。所以從 2 個籌碼出發，獲勝的概率為 $\dfrac{p^2}{p^2+q^2}$。

從 1 個籌碼出發，第一輪必須贏，否則玩家跌至 0 而輸掉。所以第一輪以概率 p 使玩家到達 2 個籌碼，而各輪相互獨立，因此

$$P_{\text{cautious}} = p \cdot \frac{p^2}{p^2+q^2} = \frac{p^3}{p^2+q^2}.$$

（如果你偏好用方程：設 P_k 為從 k 個籌碼出發獲勝的概率，則 $P_1 = pP_2$、$P_2 = pP_3 + qP_1$ 及 $P_3 = p + qP_2$ 會給出相同的答案。）

大膽玩法。從 1 個籌碼出發，數目變為 2 或 0；從 2 個出發，數目變為 4 或 0。所以玩家只有贏得頭兩輪才能獲勝：

$$P_{\text{bold}} = p^2.$$

比較。兩個概率都是正數，所以我們把它們的比與 1 作比較：

$$\frac{P_{\text{cautious}}}{P_{\text{bold}}} = \frac{p}{p^2+q^2}.$$

由於 $p^2+q^2>0$，這個比大於 1 當且僅當

$$p>p^2+q^2 \iff p-p^2>q^2 \iff pq>q^2 \iff p>q,$$

最後一步除以 $q>0$（因為 $p<1$，所以成立）。而 $p>q=1-p$ 恰好在 $p>\frac{1}{2}$ 時成立。同理，這個比小於 1 恰好在 $p<q$，即 $p<\frac{1}{2}$ 時成立。所以當 $\frac{1}{2}<p<1$ 時謹慎玩法較好，當 $0<p<\frac{1}{2}$ 時大膽玩法較好。（在 $p=\frac{1}{2}$ 時兩者都給出 $\frac{1}{4}$。）

驗算

- 在 $p=\frac{1}{2}$ 時，謹慎玩法是一個公平的隨機漫步（random walk），從 1 出發先到達 4 而不是先到達 0 的機會是 $\frac{1}{4}$。我們的公式給出 $\frac{1}{8}/\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，與大膽玩法的 $p^2=\frac{1}{4}$ 一致。
- 在 $p=0.7$ 時：謹慎玩法給出 $0.343/0.58\approx 0.591$，大膽玩法給出 0.49。在 $p=0.3$ 時：謹慎玩法給出 $0.027/0.58\approx 0.0466$，大膽玩法給出 0.09。兩者都與逐輪追蹤籌碼分佈的電腦驗算相符。
- 在第 (ii) 部分，$p=\frac{1}{2}$ 給出 $\frac{1}{2}$，正如對稱性所要求的。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分，把「AB」和「BA」當作同一個概率為 pq 的結果，而不是 $2pq$。
- 忘記說明為何一對未結束比賽的局總會使比賽回到打平狀態。理由是比賽不可能在奇數局後結束。
- 在比較時，沒有說明有關的量是正數便展開相乘或相除。

STEP 之外

謹慎玩法正是賭徒破產（gambler's ruin）問題。它是一個帶有吸收壁（absorbing barriers）的隨機漫步；當 $p\neq q$ 時，從 k 出發、目標為 N 的一般答案是 $\dfrac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}$。在不利的遊戲中大膽玩法最好、在有利的遊戲中保守玩法最好，這個結果可追溯至 Dubins 和 Savage 對最優賭博策略的研究。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）正是用這種「按第一步作條件分析」的方法來處理隨機漫步和賭徒破產問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。