詳細解答

STEP II 2021，第 10 題

力學 • 非慣性參考系

STEP II 2021，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 11.5 節加速火車中的重力中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/accelerating-frame.html

關鍵思路

坐標軸隨列車移動，所以它們並不構成慣性參考系（inertial frame）。最乾淨利落的處理方法，是求出珠子的眞實加速度：即珠子相對於列車的加速度，加上列車本身的加速度。這樣牛頓第二定律（Newton's second law）便成立；又因為鋼線光滑（smooth），反作用力（reaction）垂直於鋼線，所以它沿珠子的路徑不做功。把運動方程與珠子的（相對）速度取點積，便能消去未知的反作用力，剩下一個類似能量、而且守恆的量。

解答

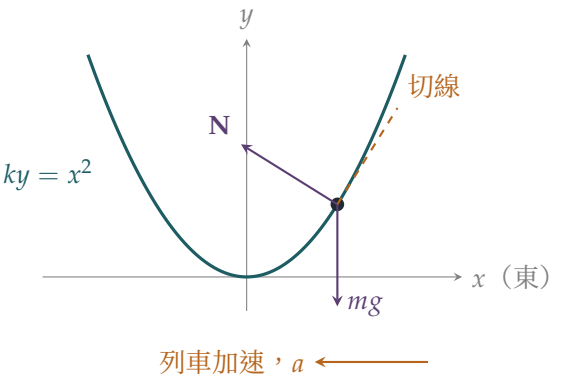
把珠子視為質量為 m 的質點，並把鋼線視為光滑，因此鋼線對珠子的反作用力 $\mathbf{N}$ 恆垂直於鋼線。設 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 分別為指向東方和向上的單位向量（unit vector）。

列車向西加速，所以它的加速度是 $-a\mathbf{i}$。珠子相對於列車的位置是 $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$，因此它的真實（地面參考系中的）加速度是

$$(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+\ddot{y}\,\mathbf{j}.$$

作用於珠子的力只有重力 $-mg\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{N}$，所以由牛頓第二定律得

$$m(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+m\ddot{y}\,\mathbf{j}=\mathbf{N}-mg\,\mathbf{j}. \qquad (*)$$



第 (i) 部分

假設珠子相對於列車一直停留在原點。那麼它便與列車有相同的加速度 $-a\mathbf{i}$，因此需要一個水平力 $-ma\mathbf{i}$，其中 $a > 0$。但在原點處，鋼線 $y = x^2/k$ 的斜率為 $2x/k = 0$，即鋼線在該處是水平的，而光滑鋼線的反作用力垂直於鋼線，也就是鉛直方向。重力同樣是鉛直的。既然沒有任何水平力作用，珠子便不可能隨列車一起加速；它必定相對於列車移動。（珠子的真實水平加速度是 0，而列車的加速度是向西的 a，所以珠子開始沿鋼線向東滑動，即朝 x 的正方向移動。）

第 (ii) 部分

珠子沿鋼線移動時，由於鋼線固定在列車上，珠子相對於列車的速度 $\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}$ 與鋼線相切。由於 $\mathbf{N}$ 垂直於鋼線，

$$\mathbf{N} \cdot (\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}) = 0.$$

把 $(*)$ 改寫為 $m(\ddot{x} - a)\,\mathbf{i} + m(\ddot{y} + g)\,\mathbf{j} = \mathbf{N}$，然後兩邊與 $\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j}$ 取純量積（scalar product），再除以 m，得

$$\dot{x}(\ddot{x} - a) + \dot{y}(\ddot{y} + g) = 0,$$

此即所求。左邊恰好是一個導數（exact derivative）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy\right) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} - a\dot{x} + g\dot{y} = 0,$$

所以在整個運動過程中，$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy$ 是常數。

? **想一想** 既然反作用力在地面參考系中會做功，為甚麼與相對速度取點積是合理的？

在地面參考系中，珠子的速度多了一項 $-at\,\mathbf{i}$，它並不沿着鋼線方向，所以 $\mathbf{N}$ 在該參考系中會做功。但恆等式 $\mathbf{N} \cdot \mathbf{u} = 0$ 純粹是幾何事實：對任何與鋼線相切的向量 $\mathbf{u}$ 都成立，而相對速度正是這樣的向量。我們用到的就只有這一點。

第 (iii) 部分

開始時 $x = y = 0$ 且 $\dot{x} = \dot{y} = 0$，所以該常數為 0。設 v 為相對於列車的速率，並利用 $y = x^2/k$，得

$$\tfrac{1}{2}v^2 = ax - gy = ax - \frac{gx^2}{k} = \frac{g}{k}\,x\Big(\frac{ak}{g} - x\Big). \qquad (\dagger)$$

由於 $v^2 \geq 0$，珠子被限制在 $0 \leq x \leq ak/g$ 之內，而且只有在這個區間的兩個端點才有 $v = 0$。由第 (i) 部分，珠子開始時朝 x 的正方向移動。當 $0 < x < ak/g$ 時，它的速率為正，所以它沿鋼線一直朝同一方向移動，直至到達 $x = ak/g$，在該處瞬間靜止。（珠子確實會在該處折返：$(*)$ 在該點的切向分量（tangential component）不為零，因為 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax - gx^2/k) = a - 2a = -a \neq 0$。）之後珠子在 $x = 0$ 與 $x = ak/g$ 之間來回振盪（oscillate）。

在這個區間上，$y = x^2/k$ 是 x 的遞增函數，所以最大高度在 $x = ak/g$ 處達到：

$$b = \frac{1}{k}\Big(\frac{ak}{g}\Big)^2 = \frac{a^2k}{g^2}.$$

第 (iv) 部分

由 $(\dagger)$，$v^2 = 2\big(ax - gx^2/k\big)$，這是 x 的二次函數，其最大值出現在兩根 0 與 ak/g 的中點，所以相對於列車的速率在以下位置最大：

$$x = \frac{ak}{2g}.$$

在該處

$$v^2 = 2\Big(\frac{a^2k}{2g} - \frac{a^2k}{4g}\Big) = \frac{a^2k}{2g}, \qquad \text{所以} \qquad v_{\max} = a\sqrt{\frac{k}{2g}}.$$

驗算

- 極限情況：若 $a = 0$，珠子只會停留在鋼線的最低點；而的確 $b = 0$ 且 $v_{\max} = 0$。
- 有效重力（effective gravity）：在列車中，珠子感受到的有效重力是 $(a, -g)$，向東傾斜。速率最大的位置 $x = ak/(2g)$，恰好是鋼線斜率 $2x/k$ 等於 a/g 之處，因此該處的切線垂直於有效重力：這正是鋼線在傾斜重力場中的「最低點」。折返點 $x = ak/g$ 與原點的距離是它的兩倍，這與在一個關於 x 為二次的勢能中作對稱振盪的情況一致。
- 量綱（dimensions）：k 是長度，所以 a^2k/g^2 是長度，而 $a\sqrt{k/g}$ 是速率。
- 數值驗證：取 $a = 2$、$k = 1.5$ 及 $g = 9.8$（國際單位制），用電腦逐步推進運動，得

到最大高度為 0.06247 m，最大速率為 $0.5533\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，出現在 $x = 0.1531\,\mathrm{m}$，分別與 a^2k/g^2、$a\sqrt{k/(2g)}$ 和 $ak/(2g)$ 吻合。

常見錯誤

- 把 $\ddot{x}$ 當作珠子的真實水平加速度。$\ddot{x}$ 只是珠子相對於列車的加速度，必須再加上列車本身的加速度 $-a$。
- 弄錯 a 的正負號：列車向西加速，所以在列車中珠子被推向東，即朝 x 的正方向。
- 以為速率在鋼線的最低點 $x = 0$ 處最大。在列車中，有效的「向下」方向是傾斜的，所以速率最大的位置其實是 $x = ak/(2g)$。

STEP 之外

第 (ii) 部分讓你初嘗非慣性參考系（non-inertial frame）中的力學：在列車的參考系中，$-ax$ 這一項就像一個向東、大小為 ma 的均勻「虛擬力」（fictitious force）所對應的勢能（potential energy），把它與重力合併，便得到傾斜的有效重力。到了大學，這套想法會推廣至旋轉參考系，屆時會出現離心力（centrifugal force）和科里奧利力（Coriolis force）；亦會推廣至拉格朗日力學（Lagrangian mechanics），在那裏像 **N** 這樣的約束力（constraint force）從一開始便被消去。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）有一章很好地講解了非慣性系統和虛擬力。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。