詳細解答

STEP II 2021，第 1 題

純數學 • 三角方程

> **STEP II 2021，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

關鍵思路

正弦與餘弦的乘積不好處理，但它們的和卻很容易處理，所以開首的恆等式(identity)讓我們把乘積換成和。在 (i) 中，這把一個三重乘積化成一個關於 $\cos 2x$ 的三次式(cubic)，而且有一個一眼可見的因式。在 (ii) 中，我們先消去正切（tangent），再把每個因子與另一類型的對應因子配對，整條方程便會化簡成兩個簡單因式的乘積。唯一需要額外留意的，是正切無定義的那些點。

解答

恆等式

把展開式

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B,\qquad \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

相加，得 $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$。取 $A=3a$ 及 $B=a$，

$$\cos a\cos 3a=\tfrac{1}{2}(\cos 4a+\cos 2a),$$

此即所求。同樣地，把 $\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$ 相加，得 $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$。取 $A=a$ 及 $B=3a$，並利用 $\sin(-2a)=-\sin 2a$，

$$\sin a\cos 3a=\tfrac{1}{2}(\sin 4a-\sin 2a).$$

（把角色對調，取 $A=3a$ 及 $B=a$，便得到配套的 $\cos a\sin 3a=\frac{1}{2}(\sin 4a+\sin 2a)$，稍後我們也會用到。）

第 (i) 部分

由第一條恆等式，$4\cos x\cos 2x\cos 3x = 2\cos 2x\,(\cos 4x + \cos 2x)$。設 $c = \cos 2x$，於是 $\cos 4x = 2c^2 - 1$。方程變成

$$2c\,(2c^2 + c - 1) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4c^3 + 2c^2 - 2c - 1 = 0.$$

把各項兩兩分組，$2c^2(2c+1) - (2c+1) = 0$，即

$$(2c+1)(2c^2 - 1) = 0,$$

所以 $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ 或 $\cos 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。

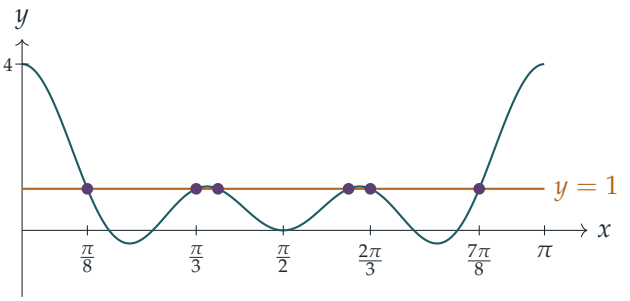
當 $0 \le x \le \pi$ 時，$0 \le 2x \le 2\pi$，而 $\cos 2x$ 每一個嚴格介乎 -1 與 1 之間的值，都在此範圍內給出兩個 $2x$ 的值：

$$\begin{aligned}
\cos 2x = -\tfrac{1}{2} &\implies 2x = \tfrac{2\pi}{3},\ \tfrac{4\pi}{3} &&\implies x = \tfrac{\pi}{3},\ \tfrac{2\pi}{3};\\
\cos 2x = \tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{\pi}{4},\ \tfrac{7\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{\pi}{8},\ \tfrac{7\pi}{8};\\
\cos 2x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{3\pi}{4},\ \tfrac{5\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{3\pi}{8},\ \tfrac{5\pi}{8}.
\end{aligned}$$

每一步都是可逆的，所以解為

$$x = \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{8}.$$

圖像證實曲線與直線 $y = 1$ 恰好相交六次。



第 (ii) 部分

設 $\tan x = \tan 2x \tan 3x \tan 4x$。要這式子有意義，四個正切都必須有定義，所以 $\cos x$、$\cos 2x$、$\cos 3x$ 及 $\cos 4x$ 全都不為零。因此我們可以兩邊同乘 $\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x$，得

$$\sin x\cos 3x \cdot \cos 2x\cos 4x = \cos x\sin 3x \cdot \sin 2x\sin 4x.$$

? **想一想** 為甚麼要把 $\sin x$ 與 $\cos 3x$ 配對，把 $\cos x$ 與 $\sin 3x$ 配對？

因為這正好是我們的恆等式能化成和的乘積，而且兩個和都只涉及 $\sin 4x$ 與 $\sin 2x$，它們本來已在方程的其他地方出現。利用 $\sin x\cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$ 及 $\cos x \sin 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$，再乘以 2，

$$(\sin 4x - \sin 2x)\cos 2x \cos 4x = (\sin 4x + \sin 2x)\sin 2x \sin 4x.$$

現在把左邊的 $\sin 2x \cos 2x$ 換成 $\frac{1}{2}\sin 4x$，使每一項都有因子 $\sin 4x$：

$$\sin 4x \cos 4x \cos 2x - \tfrac{1}{2}\sin 4x \cos 4x = \sin 4x \sin^2 2x + \sin 4x \sin 4x \sin 2x.$$

把所有項移到同一邊，

$$\sin 4x \left[(\cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x) - \left(\sin^2 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right)\right] = 0.$$

第一個括號是 $\cos(4x + 2x) = \cos 6x$。至於第二個，$\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$，所以 $\sin^2 2x + \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}$。因此

$$\sin 4x \left(\cos 6x - \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

所以 $\cos 6x = \frac{1}{2}$ 或 $\sin 4x = 0$，此即所求。

接着求 $(\star)$ 在 $0 \le x \le \pi$ 內的解。

想一想 $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$ 的每一個解都是 $(\star)$ 的解嗎？

不一定：唯一可能不可逆的步驟是乘以那些餘弦，而這一步恰好在四個正切都有定義時才可逆。所以 $(\star)$ 的解，就是 $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$ 中滿足 $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x \neq 0$ 的那些解。

情況 $\sin 4x = 0$。在 $[0, \pi]$ 內這給出 $x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$。在 $x = \frac{\pi}{4}$ 及 $x = \frac{3\pi}{4}$，$\tan 2x$ 無定義；在 $x = \frac{\pi}{2}$，$\tan x$ 無定義。在 $x = 0$ 及 $x = \pi$，每個正切都是 0，而 $(\star)$ 變成 $0 = 0$。所以 $x = 0$ 及 $x = \pi$ 是解。

情況 $\cos 6x = \frac{1}{2}$。此時 $6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$，所以 $x = \frac{(6k \pm 1)\pi}{18}$。由 $0 \le 6x \le 6\pi$ 得

$$x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}.$$

每一個都是 $\frac{m\pi}{18}$ 的形式，其中 m 不是 3 的倍數。餘弦 $\cos nx$ 只在 nx 是 $\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{18}$ 的奇數倍時才為零，這需要 $9 \mid nm$。由於 $3 \nmid m$，這就需要 $9 \mid n$，但對 $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ 而言這是不可能的。所以四個正切都有定義，這六個值全都是解。

總括而言，$(\star)$ 在 $0 \le x \le \pi$ 內有八個解：

$$x = 0, \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \pi.$$

驗算

- 在 (i) 中，當 $x = \frac{\pi}{8}$ 時：$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，且 $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$，所以乘積是 $4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1$。
- 在 (ii) 中，當 $x = \frac{\pi}{18} = 10^\circ$ 時：$\tan 10^\circ \approx 0.17633$，而 $\tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ \approx 0.36397 \times 0.57735 \times 0.83910 \approx 0.17633$。
- 用電腦在 $[0, \pi]$ 上掃描兩條方程，分別恰好找到六個和八個解，位置正是上述各值。

常見錯誤

- 在 (ii) 中保留了 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$：它們滿足 $\sin 4x = 0$，但會令 $(\star)$ 中某個正切無定義。
- 漏掉 $x = 0$ 及 $x = \pi$，或在每個週期內漏掉 $2x$（或 $6x$）的第二個值。
- 在化簡過程中除以 $\sin 4x$，這會失去題目要你找出的那個因式。

STEP 之外

積化和差公式（product-to-sum formulae）其實是 $e^{iA}e^{iB} = e^{i(A+B)}$ 在實變數世界中的投影：寫成 $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$，便能把任何餘弦的乘積化成和，而這正是通往傅里葉級數（Fourier series）的第一步——在傅里葉級數中，函數被展開成 $\cos nx$ 與 $\sin nx$ 的和。藏在 (ii) 中的驚人恆等式 $\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ$，正是把三角函數值看成單位根（roots of unity）時常會出現的那類驚喜。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）把這個觀點發揮得非常出色。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。