詳細解答

STEP III 2020，第 9 題

力學 • 剛體平衡

STEP III 2020，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

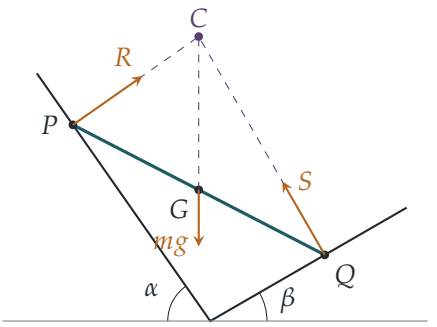
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

桿只受三個力作用：作用於中點的重力，以及兩端各一個接觸力。一個物體在三個互不平行的力作用下處於平衡（equilibrium）時，三力的作用線（lines of action）必交於同一點，因此整道題就變成幾何問題：用兩種不同方法求出該交點的高度，然後令兩者相等。在第 (ii) 部分，Q 處的法向反作用力（normal reaction）與極限摩擦力（limiting friction）合成為一個總反作用力，它偏離法線的角度為摩擦角（angle of friction）λ，其中 $\tan\lambda = \mu$；同樣的幾何論證仍然適用，只需把 β 換成 $\beta + \lambda$。

解答

把桿視為均勻（uniform）的剛體（rigid body），長度為 $2l$，中點為 G，並假設兩個平面固定不動。設 Π_1 位於兩平面交線的左方，Π_2 位於右方，於是 P 在左方且較高，Q 在右方且較低。



第 (i) 部分

兩個平面都是光滑（smooth）的，所以 P 處的反作用力 R 垂直於 Π_1，Q 處的反作用力 S 垂直於 Π_2。垂直於一個傾角為 α 的平面的直線，與鉛垂線的夾角為 α；因此 R 的作用線從 P 向上延伸並向 Q 一方傾斜，與向上鉛垂線成 α 角；而 S 的作用線從 Q 向上延伸並向 P 一方傾斜，與向上鉛垂線成 β 角。

桿在三個力作用下平衡：R、S，以及經過 G 鉛垂向下的重力 mg。對 R 與 S 作用線的交點 C 取力矩（moments），R 和 S 的力矩均為零，所以重力的力矩也必須為零：重力的作用線經過 C。因此 C 位於 G 的正上方。

想一想 怎樣把「C 位於 G 的正上方」轉化為一條方程？

沿兩條途徑計算 C 高出 Q 的高度。由於 G 是中點，而桿與水平線成 θ 角，G 與兩端的水平距離均為 $l\cos\theta$，而 P 比 Q 高 $2l\sin\theta$。

- 沿 R 的作用線：沿一條與鉛垂線成 α 角的直線移動水平距離 $l\cos\theta$，高度上升 $l\cos\theta\cot\alpha$。所以 C 高出 Q 的高度為 $2l\sin\theta + l\cos\theta\cot\alpha$。
- 沿 S 的作用線：同理，C 高出 Q 的高度為 $l\cos\theta\cot\beta$。

令兩者相等，再除以 $l\cos\theta \neq 0$，得

$$2\tan\theta + \cot\alpha = \cot\beta, \qquad \text{即} \qquad 2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha,$$

此即所求。由於 $\beta < \alpha$（兩者皆為銳角），$\cot\beta > \cot\alpha$，所以 $\theta > 0$，與 P 高於 Q 一致。

第 (ii) 部分

現在 Π_1 仍然光滑，所以 P 處的反作用力與之前完全相同。在 Q 處則有法向反作用力 N，以及沿 Π_2 的摩擦力 F。

*摩擦力的方向。*桿是剛體，所以 P 與 Q 的速度沿桿方向的分量相等。若 P 開始以速率 u 沿 Π_1 向下滑動，而 Q 以（帶正負號的）速率 w 沿 Π_2 向上移動，則沿桿從 P 指向 Q 的方向（此方向在水平線下方 ϕ 角）分解，得

$$u\cos(\alpha - \phi) = w\cos(\beta + \phi).$$

這裏 $\cos(\alpha-\phi) > 0$，而下文會證明 $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$，所以 $w > 0$：Q 即將沿 Π_2 向上移動。摩擦力阻礙這個運動，所以 F 沿 Π_2 向下作用；又因平衡處於極限狀態，$F = \mu N$。

*總反作用力。*把 N 與 F 合成為單一個力 S'。它與法線成 λ 角，其中 $\tan\lambda = F/N = \mu$；由於 F 沿平面向下（指向兩平面的交線），它令反作用力進一步向 P 一方傾斜。所以 S' 的作用線從 Q 向上延伸，與向上鉛垂線成 $\beta + \lambda$ 角，並向 P 一方傾斜。（若 $\beta + \lambda > \frac{1}{2}\pi$，這條作用線實際上是向下的；下面的高度公式仍然成立，只是餘切值為負。）

桿再次在三個力作用下平衡，所以三力的作用線交於 G 正上方的一點，而第 (i) 部分的論證可以逐字照搬，只需把 θ 換成 ϕ，β 換成 $\beta+\lambda$：

$$2\tan\phi = \cot(\beta+\lambda) - \cot\alpha.$$

由此可見 $2\tan\phi < \cot\beta$，所以 $\tan\phi < \cot\beta = \tan(\frac{1}{2}\pi - \beta)$，即 $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$，這就證實了我們對摩擦力方向的假設。

與 $2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha$ 相減，得

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \cot\beta - \cot(\beta+\lambda) = \frac{\sin(\beta+\lambda)\cos\beta - \cos(\beta+\lambda)\sin\beta}{\sin\beta\,\sin(\beta+\lambda)}$$
$$= \frac{\sin\lambda}{\sin\beta\,(\sin\beta\cos\lambda + \cos\beta\sin\lambda)}.$$

分子分母同除以 $\cos\lambda$，利用 $\tan\lambda = \mu$，再提出因子 $\cos\beta$：

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \frac{\mu}{\sin\beta\,(\sin\beta + \mu\cos\beta)} = \frac{\mu}{\sin\beta\cos\beta\,(\tan\beta+\mu)} = \frac{2\mu}{(\mu+\tan\beta)\sin 2\beta}.$$

兩邊除以 2，得

$$\tan\theta - \tan\phi = \frac{\mu}{(\mu+\tan\beta)\sin 2\beta},$$

此即所求結果。

驗算

- 當 $\mu = 0$ 時右方為 0，所以 $\phi = \theta$：第 (ii) 部分退化為第 (i) 部分，理應如此。
- 右方為正，所以 $\phi < \theta$：摩擦力令桿可以比在光滑平面上更平地靜止，這是合理的，因為 P 正是即將向下滑動的一端。
- 取 $\alpha = 60°$，$\beta = 30°$。則 $2\tan\theta = \sqrt{3} - 1/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$，所以 $\theta = 30°$。取 $\mu = 0.5$，公式給出 $\tan\phi = 0.5774 - 0.5/(1.0774\times 0.8660) \approx 0.0415$，所以 $\phi \approx 2.4°$。對這些數值直接解水平分解、鉛垂分解及對 G 取力矩所得的方程（以電腦驗算，並對數千組隨機角度及摩擦系數重複進行），得到相同的 ϕ。
- 任何 μ 都可以借助 $2\tan\phi = \cot(\beta+\lambda) - \cot\alpha$ 迅速驗算：這裏 $\lambda \approx 26.57°$，$\cot 56.57° \approx 0.6606$，而 $(0.6606 - 0.5774)/2 \approx 0.0416$，在捨入誤差範圍內吻合。

常見錯誤

- 把摩擦力設為沿 Π_2 向上。當 P 向下滑動時，桿長不變迫使 Q 沿其所在平面向上移動，所以 Q 處的摩擦力沿該平面向下。
- 從水平線而非鉛垂線量度反作用力的角度：傾角為 α 的平面的法線與鉛垂線成 α 角。

STEP 之外

這裏用到的三力共點(concurrency)原理，是剛體平衡一般條件的特例：合力為零，以及對任何一點的合力矩為零。把摩擦力與法向反作用力合成為半頂角為 λ 的「摩擦錐」(cone of friction)，正是工程師分析梯子、楔子和螺絲穩定性的方法；而用速度判斷摩擦力方向的論證，就是瞬時轉動中心（instantaneous centre of rotation）的概念。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）正是以這種精神處理剛體靜力學和摩擦。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。