詳細解答

STEP III 2020，第 8 題

純數學 • 數列與遞降法

STEP III 2020，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 1.8 節點算有理數中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch01/counting-rationals.html

關鍵思路

每個下標（subscript）較大的項，都由下標約為其一半的項構成。因此，任何關於數對 (u_n, u_{n+1}) 的命題，都可以推回到下標較小的數對；以遞降法（descent）論證（等價於選取最小的反例（counterexample）），便能處理每一部分。先寫出首幾項，並觀察每一對相鄰項如何產生兩對新的項，在證明之前就能看清規律。

解答

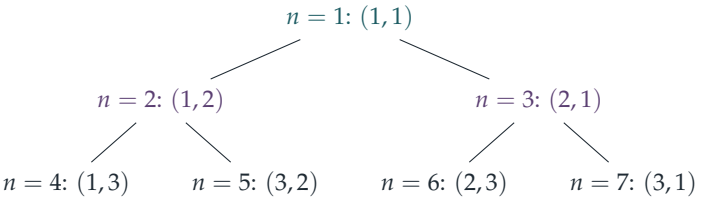
首十六項為

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 1.$$

每一項都是正整數：u_1 顯然如此，而之後每一項要麼是較前的某一項，要麼是兩個較前的項之和，所以由（強）歸納法（induction）可得此結論。

值得記下一個數對如何產生後面的數對。若 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b)$，則直接由定義得

$$(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a+b), \qquad (u_{2k+1}, u_{2k+2}) = (a+b,\ b). \tag{$*$}$$



位置 n 的數對是 (u_n, u_{n+1})；由 $(*)$，它的左子節點位於 $2n$，右子節點位於 $2n+1$。每個位於 $n \geq 2$ 的數對，都恰好以這種方式由位置 $\lfloor n/2 \rfloor$ 的數對產生。

第 (i) 部分

取一對相鄰項 (u_n, u_{n+1})，其中 $n \geq 2$，並設 $k = \lfloor n/2 \rfloor \geq 1$。

- 若 $n = 2k$，該數對為 $(u_k,\ u_k + u_{k+1})$。由於 $u_{k+1} \geq 1$，奇數下標的項 $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ 大於偶數下標的項 $u_{2k} = u_k$。
- 若 $n = 2k+1$，該數對為 $(u_k + u_{k+1},\ u_{k+1})$。此時由於 $u_k \geq 1$，$u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ 大於 $u_{2k+2} = u_{k+1}$。

因此，除了第一對 $(u_1, u_2) = (1,1)$ 之外，每一對中奇數下標的項都嚴格較大。特別地，只有第一對的兩項相等。

第 (ii) 部分

假設 $d > 1$ 同時整除 u_n 和 u_{n+1}。由於 $u_1 = u_2 = 1$，這不可能在 $n = 1$ 時發生，故 $n \geq 2$；設 $k = \lfloor n/2 \rfloor$，則 $1 \leq k < n$。

- 若 $n = 2k$：$d \mid u_{2k} = u_k$ 且 $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$，所以 d 整除兩者之差 u_{k+1}。
- 若 $n = 2k+1$：$d \mid u_{2k+2} = u_{k+1}$ 且 $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$，所以 $d \mid u_k$。

無論哪種情況，d 都同時整除 u_k 和 u_{k+1}，即較前的一對相鄰項，這正是需要證明的。

現在假設某一對相鄰項有公因數 $d > 1$，並在這樣的數對中選取 n 最小的一對 (u_n, u_{n+1})。如上所述 $n \neq 1$，而剛才的論證會給出位於 $k < n$、具有相同公因數的數對，與 n 的最小性矛盾。因此任意兩個相鄰項都互質（co-prime）。

第 (iii) 部分

假設某個有序數對 (a, b) 在兩個不同位置出現，即 $(u_m, u_{m+1}) = (u_n, u_{n+1}) = (a, b)$，其中 $m < n$。在所有這類重複中，選取 m 最小的一個。

若 $m = 1$，則 $a = b = 1$；但 $n \geq 2$，由第 (i) 部分，位置 n 的數對兩項不相等。所以

$m \geq 2$，再由第 (i) 部分亦有 $a \neq b$。

想一想 單憑 a 和 b，怎樣判斷位置是奇數還是偶數？

第 (i) 部分告訴我們，數對中較大的一項具有奇數下標，所以位置的奇偶性（parity）由數對本身決定：

- 若 $a < b$，第二項具有奇數下標，所以 m 和 n 都是偶數：$m = 2j$，$n = 2k$，其中 $j < k$。於是 $u_j = u_{2j} = a$ 且 $u_{j+1} = u_{2j+1} - u_j = b - a$；同理 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b-a)$。
- 若 $a > b$，則 m 和 n 都是奇數：$m = 2j+1$，$n = 2k+1$，其中 $1 \leq j < k$。於是 $u_{j+1} = u_{2j+2} = b$ 且 $u_j = u_{2j+1} - u_{j+1} = a - b$；同理 $(u_k, u_{k+1}) = (a-b, b)$。

兩種情況下，都有同一個有序數對出現在兩個不同位置 j 和 k，而 $j \leq m/2 < m$。這與 m 的選取矛盾。所以沒有任何正整數有序數對會在兩個不同位置相鄰出現。

第 (iv) 部分

設 $a > b$，a、b 互質，並假設 (a, b) 不是數列中的一對相鄰項。那麼 $a - b$ 和 b 都是正整數，而且互質：$a - b$ 與 b 的任何公因數也整除 $(a - b) + b = a$，所以它是 a 與 b 的公因數，必然是 1。

若在某處 $a - b$ 之後緊接 b，例如 $(u_k, u_{k+1}) = (a - b, b)$，則由 $(*)$

$$(u_{2k+1}, u_{2k+2}) = \big((a-b) + b,\ b\big) = (a, b),$$

與對 (a, b) 的假設矛盾。所以 $(a - b, b)$ 也是一對不以相鄰項出現的互質數對，而它的和為 $a < a + b$。

$a < b$ 時的相應結果：a 和 $b - a$ 是互質的正整數，它們不會以 $b - a$ 緊接 a 的方式相鄰出現，而且它們的和 b 小於 $a + b$。證明相同：a 與 $b - a$ 的公因數整除 $a + (b - a) = b$；而若 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b - a)$，則 $(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a + (b - a)) = (a, b)$。

第 (v) 部分

由於每一項都是正整數，$f(n) = u_n / u_{n+1}$ 是正有理數（rational），所以值域（range）包含於正有理數之中。我們證明每個正有理數都會被取到，而且只取到一次。

每個正有理數都在值域之內。把一個正有理數寫成最簡分數（lowest terms）p/q，其中 p、q 是互質的正整數。我們斷言每個互質數對 (p, q) 都會以 (u_n, u_{n+1}) 的形式在某個 n 出現。若不然，在沒有出現的互質數對中，選取 $a + b$ 最小的一對 (a, b)。不可能有 $a = b$：此時互質迫使 $a = b = 1$，而 $(1, 1)$ 在 $n = 1$ 出現。所以 $a > b$ 或 $a < b$，而第 (iv) 部分給出一對沒有出現、和更小的互質數對。這與最小性矛盾，所以每個互質數對 (p, q) 都會出現，設在位置 n，於是 $f(n) = p/q$。

f 是一對一（*one-to-one*）的。假設 $f(m) = f(n)$。由第 (ii) 部分，u_m/u_{m+1} 和 u_n/u_{n+1} 都是分母為正的最簡分數。一個正有理數只有一種這樣的表示，所以 $u_m = u_n$ 且 $u_{m+1} = u_{n+1}$。由第 (iii) 部分，同一個有序數對不能在兩個不同位置出現，所以 $m = n$。

因此 f 是由正整數到正有理數的雙射（bijection），故有反函數（inverse）f^{-1}：給定最簡分數 p/q，$f^{-1}(p/q)$ 就是 p 之後緊接 q 的唯一位置。例如 3 只在位置 10 緊接 5，所以 $f^{-1}(\frac{3}{5}) = 10$。

驗算

- 所列各項給出數對 $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,2), (2,3), (3,1), (1,4), \ldots$：第一對之後，奇數下標的項都較大；所有數對都互質；沒有數對重複。
- 對 3/5 執行第 (iv) 部分的遞降：$(3,5) \to (3,2) \to (1,2) \to (1,1)$。再用 $(*)$ 往回推：位置 1 的 $(1,1)$ 給出位置 2 的 $(1,2)$、位置 5 的 $(3,2)$ 和位置 10 的 $(3,5)$；確實 $u_{10} = 3$，$u_{11} = 5$。
- 用電腦檢查首二百萬項，證實了第 (i)–(iii) 部分，並發現每個滿足 $p + q \leq 21$ 的互質數對 (p,q) 都恰好出現一次。

常見錯誤

- 在第 (ii) 和第 (iii) 部分忘記另行排除第一對 $(1,1)$：它是每次遞降的基本情況。
- 在第 (iii) 部分，未加論證便假設兩個位置的奇偶性相同；正是第 (i) 部分迫使這一點成立。
- 在第 (v) 部分只證明值域是全體正有理數。要有反函數，還需要 f 是一對一的，而這要同時用到第 (ii) 和第 (iii) 部分。

STEP 之外

這就是 Stern 雙原子數列（Stern's diatomic sequence），而列出 u_n/u_{n+1} 便得到有理數的 Calkin–Wilf 枚舉（Calkin–Wilf enumeration）：一個 $\mathbb{N}$ 與 $\mathbb{Q}^+$ 之間的顯式雙射，具體地說明有理數是可數的（countable）。第 (iv) 和第 (v) 部分的遞降，正是歐幾里得算法（Euclid's algorithm）的減法形式；而樹中由 $(1,1)$ 到 (p,q) 的路徑，編碼了 p/q 的連分數（continued fraction）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）對歐幾里得算法和連分數有精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。