詳細解答

STEP III 2020，第 7 題

純數學 • 二階微分方程

STEP III 2020，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分說明，二階線性方程（second-order linear equation）有時可以因式分解（factorise）成兩個一階線性方程，而每一個都可以用積分因子（integrating factor）求解。第 (ii) 部分的工作是找出這個分解：比較係數（matching coefficients）會得出一條關於 g 的非線性（non-linear）一階方程，而一個冪函數形式（power-law）的猜測就能解出它。之後只需依次解兩條一階方程，並在過程中代入初始條件（initial conditions）。

解答

第 (i) 部分

由第二條方程可以把 u 用 y 表示：

$$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{g}(x)\, y.$$

對其求導，並對 $\mathrm{g}(x)y$ 使用乘積法則（product rule），得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

把兩者代入 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)u = \mathrm{h}(x)$：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\, y = \mathrm{h}(x),$$

再把含 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的項和含 y 的項分別合併，便正好得到方程 (1)。

第 (ii) 部分

g 的方程。 比較 (2) 與 (1)，我們需要

$$\mathrm{g}(x)+\mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x},\qquad \mathrm{g}'(x)+\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2},\qquad \mathrm{h}(x)=4x+12.$$

由第一式得 $\mathrm{f}=1+\frac{4}{x}-\mathrm{g}$；代入第二式即可消去 f：

$$\mathrm{g}'(x)+\Big(1+\frac{4}{x}\Big)\mathrm{g}(x)-(\mathrm{g}(x))^2=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}.$$

這就是所求的關於 g 的一階方程。

冪函數形式的解。 設 $\mathrm{g}(x)=kx^n$，則左邊為

$$knx^{n-1}+kx^n+4kx^{n-1}-k^2x^{2n}.$$

? **想一想** 在未知道 k 之前，應如何選取 n？

留意 x 的冪次。右邊只含 x^{-1} 和 x^{-2}，所以 x^n、x^{n-1} 和 x^{2n} 這些冪次都只能產生這兩項。取 $n=-1$ 正好做到：$x^n=x^{-1}$，而 x^{n-1} 和 x^{2n} 都是 x^{-2}。左邊於是變成

$$\frac{k}{x}+\frac{-k+4k-k^2}{x^2}=\frac{k}{x}+\frac{3k-k^2}{x^2}.$$

比較 x^{-1} 項得 $k=2$，此時 $3k-k^2=6-4=2$，與 x^{-2} 項亦吻合。因此

$$n=-1,\quad k=2:\qquad \mathrm{g}(x)=\frac{2}{x},\qquad \mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x}=1+\frac{2}{x}.$$

解方程 (2)。 根據第 (i) 部分，(2) 現在等價於以下一對方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\Big(1+\frac{2}{x}\Big)u=4x+12,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=u.$$

由於條件是在 $x=1$ 處給出，我們在 $x>0$ 上求解。

*關於 u 的方程。*積分因子為 $\exp\int(1+\frac{2}{x})\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+2\ln x}=x^2\mathrm{e}^x$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\mathrm{e}^xu)=(4x^3+12x^2)\,\mathrm{e}^x.$$

右邊正好是 $4x^3\mathrm{e}^x$ 的導數（乘積法則），所以

$$x^2\mathrm{e}^xu=4x^3\mathrm{e}^x+C,\qquad u=4x+\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x^2}.$$

u 在 $x=1$ 的值由初始條件得出：$u=y'+\frac{2}{x}y=-3+2\times5=7$。於是 $4+C\mathrm{e}^{-1}=7$，得 $C=3\mathrm{e}$，以及

$$u=4x+\frac{3\mathrm{e}^{1-x}}{x^2}.$$

關於 y 的方程。積分因子為 $\mathrm{e}^{2\ln x} = x^2$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2y) = x^2u = 4x^3 + 3\mathrm{e}^{1-x}, \qquad \text{因此} \qquad x^2y = x^4 - 3\mathrm{e}^{1-x} + D.$$

在 $x = 1$ 處：$5 = 1 - 3 + D$，所以 $D = 7$。因此

$$\boxed{y = x^2 + \frac{7 - 3\mathrm{e}^{1-x}}{x^2}}.$$

這裏用了 $y(1) = 5$，而求 C 時用了 $y'(1) = -3$，所以兩個條件都成立。

驗算

- 在 $x = 1$ 處：$y = 1 + 7 - 3 = 5$。求導得 $y' = 2x - 14x^{-3} + 3\mathrm{e}^{1-x}x^{-2} + 6\mathrm{e}^{1-x}x^{-3}$，在 $x = 1$ 處為 $2 - 14 + 3 + 6 = -3$。
- 特解部分（particular part）$y = x^2$ 本身應滿足 (2)：$2 + (1 + \frac{4}{x})2x + (\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})x^2 = 2 + 2x + 8 + 2x + 2 = 4x + 12$。確實如此。
- 用電腦把方框中的 y 在 $x = 0.3$ 至 $x = 5$ 之間的許多點代入 (2)，兩邊在數值微分誤差（約 10^{-5}）範圍內一致。

常見錯誤

- 直接把 $y'(1) = -3$ 當作 u 的初始值。u 的初始值是 $y' + \mathrm{g}y = 7$，而不是 -3。
- 在第 (i) 部分漏掉 $\mathrm{g}'(x)$ 項：g 依賴於 x，所以 $\mathrm{g}y$ 必須用乘積法則求導。
- 在兩個步驟之一漏掉積分常數。總共有兩個常數，正好對應兩個初始條件。

STEP 之外

這就是把微分算子（differential operator）因式分解的想法：$(D + \mathrm{f})(D + \mathrm{g})y = \mathrm{h}$，其中 D 表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$。由於 g 依賴於 x，這兩個因子不可交換（commute），這正是交叉項 g' 出現的原因。我們為 g 找到的方程是一條*黎卡提方程*（Riccati equation），以黎卡提（Riccati）命名。黎卡提方程是非線性的，但只要知道一個解，就足以把線性二階問題化為兩個一階問題，正如本題所示。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵蓋積分因子、降階法（reduction of order）及黎卡提方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。