詳細解答

STEP III 2020，第 6 題

純數學 • 極坐標曲線與面積

STEP III 2020，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

三個部分都建基於同一個函數 $\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}$。$C_2$ 的方程是關於 r 的二次方程（quadratic），其兩個根為 $\cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$。因此 C_2 就是 C_1（較大的根）再加上第二條位於內側的分支（較小的根），而兩條分支在判別式（discriminant）$\cos 2\theta$ 等於零之處相接。掌握了這一點，兩條分支之間的面積便化為單一個積分，因為 $r_+^2 - r_-^2$ 可以因式分解。

解答

第 (i) 部分

設 $y = \cos x + \sqrt{\cos 2x}$。它恰好在 $\cos 2x \geq 0$ 時為實數，而在給定區間上，這正是整個 $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$。此函數是偶函數（even function），所以圖像對稱於 y 軸。

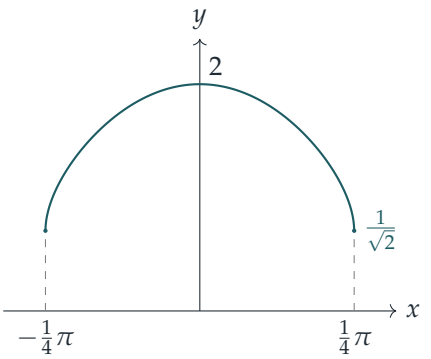
數值。在 $x = 0$ 時，$y = 2$。在 $x = \pm\frac{1}{4}\pi$ 時，$\cos 2x = 0$，而 $y = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$。

斜率。當 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 時，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin x - \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} < 0,$$

因為在該範圍內兩項皆為負。所以當 x 由 0 增至 $\frac{1}{4}\pi$ 時，y 由 2 遞減至 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，最大值位於 $(0, 2)$。當 $x \to \frac{1}{4}\pi^-$ 時，$\sqrt{\cos 2x} \to 0^+$ 而 $\sin 2x \to 1$，故 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to -\infty$：曲線以鉛垂切線（tangent）到達端點。

$x = 0$ 附近。利用 $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ 及 $\sqrt{\cos 2x} \approx \sqrt{1 - 2x^2} \approx 1 - x^2$，得 $y \approx 2 - \frac{3}{2}x^2$，是一個平滑的極大點。



第 (ii) 部分

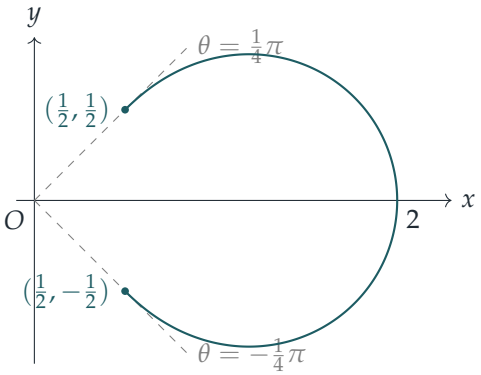
現在同一個函數給出在方向 θ 上與原點的距離 r。C_1 的端點位於 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$，即直角座標點 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$。在 $\theta = 0$ 時，曲線位於 $(2,0)$，是離 O 最遠的點。由於 r 是 θ 的偶函數，C_1 對稱於初始線（initial line）。

> **想一想** 對極座標曲線（polar curve）而言，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 為無限大代表甚麼？

由第 (i) 部分可知，當 $\theta \to \frac{1}{4}\pi^-$ 時，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta \to -\infty$。在該端附近，$r$ 變化很大而 θ 幾乎不變，所以曲線是沿着徑向直線 $\theta = \frac{1}{4}\pi$（即直線 $y = x$）移動。由於 r 遞減，曲線是沿 $y = x$ 朝向原點到達 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 的。特別地，高度 $y = r\sin\theta$ 必須在到達端點之前取得最大值。事實上

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

在 $\theta = 0$ 附近為正，而當 $\theta \to \frac{1}{4}\pi$ 時趨向 $-\infty$。（最大高度約為 0.81，出現在 $\theta \approx 34°$。）因此 C_1 是一道經過 $(2,0)$ 的拱形，向上鼓出超過 $y = \frac{1}{2}$，再回落至 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，並在該處與直線 $y = x$ 相切；軸下方則是其鏡像。



第 (iii) 部分

*兩條分支。*把方程視為關於 r 的二次方程：

$$r^2 - 2r\cos\theta + \sin^2\theta = 0 \iff r = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}.$$

記 $r_\pm = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$。外側分支 r_+ 正是 C_1。內側分支滿足 $r_- \geq 0$，因為 $\cos^2\theta \geq \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$，且只在 $\sin\theta = 0$ 時取等號。所以 r_- 是一條真正的極座標曲線，而且只在 $\theta = 0$ 時到達原點。

*在 $\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ 處。*此時 $\cos 2\theta = 0$，所以二次方程有重根（repeated root）：

$$r = \cos\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

兩條分支都經過 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$。

*r 很小時。*若 r 很小，則 r^2 相對於 $2r\cos\theta$ 可以忽略，而 θ 也必須很小，因為 $\sin^2\theta = 2r\cos\theta - r^2$ 很小。於是 $2r\cos\theta \approx \sin^2\theta$，再利用 $\cos\theta \approx 1$、$\sin\theta \approx \theta$，

$$r \approx \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} \approx \tfrac{1}{2}\theta^2,$$

即為所求。（等價地，$r_- \approx (1 - \frac{1}{2}\theta^2) - (1 - \theta^2) = \frac{1}{2}\theta^2$。）

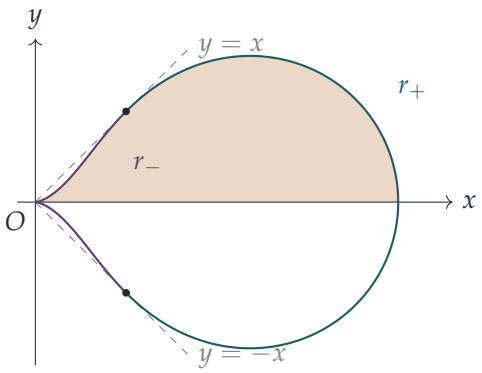
*$r = 0$ 附近的形態。*此時 $x = r\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$，$y = r\sin\theta \approx \frac{1}{2}\theta^3$，所以 $y^2 \approx 2x^3$。因此內側分支從 $x > 0$ 的一側、自上方及下方進入原點，並與初始線相切，在 O 處形成一個指向左方的尖點（cusp）。

*$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ 附近的形態。*對方程進行隱函數微分（implicit differentiation），

$$(2r - 2\cos\theta)\,\mathrm{d}r + (2r\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{\cos\theta - r}{\sin\theta\,(r + \cos\theta)}.$$

在 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ 處，分子為 0 而分母不為零，所以 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r = 0$。此外，在整條曲線上 $\theta \leq \frac{1}{4}\pi$。因此 θ 在該處取得最大值，而曲線與徑向直線 $y = x$ 相切。外側分支沿 $y = x$ 朝 O 而來，內側分支沿 $y = x$ 背離 O 而去，兩者在 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 平滑地相接，並沒有角點。由對稱性，$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 處亦然。

所以 C_2 是一條閉曲線，對稱於初始線，形如一滴淚珠，其尖端就是 O 處的尖點。它的外緣是 C_1，內緣則由 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 向下進入 O 處的尖點，再出來到達 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$。



（繪圖時使用 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u$，這使得 $\sqrt{\cos 2\theta} = \cos u$。讓 u 走一整圈，便能描出整條 C_2，而不會出現無限大的斜率。）

面積。當 $0 \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$ 時，角度為 θ 的射線恰好在 $r_- \le r \le r_+$ 時位於 C_2 之內。所以陰影部分的面積是兩個極座標扇形（sector）之差：

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\left(r_+^2 - r_-^2\right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\cos 2\theta}\cdot 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/4} \cos\theta\sqrt{1-2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

作代換（substitution）$\sqrt{2}\sin\theta = \sin u$，於是 $\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \cos u\,\mathrm{d}u$，而當 θ 由 0 變至 $\frac{1}{4}\pi$ 時，u 由 0 變至 $\frac{1}{2}\pi$：

$$A = 2\int_0^{\pi/2} \cos u\cdot\frac{\cos u}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

即為所求結果。（等價地，代換 $s = \sqrt{2}\sin\theta$ 把積分化為 $\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s$，即單位圓盤（unit disc）四分之一面積的 $\sqrt{2}$ 倍。）

驗算

- 在 $\theta = 0$ 時，$r_\pm = 1 \pm 1$，得出點 $(2,0)$ 和 O，與草圖吻合。
- 在 $\theta = 0.01$ 時，$r_- = \cos 0.01 - \sqrt{\cos 0.02} \approx 5.0002\times 10^{-5}$，對比 $\frac{1}{2}\theta^2 = 5\times 10^{-5}$。
- 數值上，$\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.11072$，而直接在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上對 $\frac{1}{2}(r_+^2 - r_-^2)$ 作數值積分，得出的值準確至小數點後六位相同。
- 粗略估界：C_2 的上半部位於矩形 $[0,2]\times[0,0.81]$ 之內，其面積約為 1.62；而它包含以 $(\frac{1}{2},0)$、$(2,0)$、$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 為頂點的三角形，面積為 0.375。數值 1.11 合理地落在兩者之間。

常見錯誤

- 在 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 處把 C_1 畫成有角點，或畫成曲線穿過 $y = x$：$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 為無限大，表示曲線在該處與徑向直線相切。
- 在 O 處畫成平滑的圓頭而非尖點：$y^2 \approx 2x^3$ 正是典型的尖點形狀。
- 只計算 $\int \frac{1}{2} r_+^2 \, \mathrm{d}\theta$，這是直至 C_1 的面積，連內側分支之內的空心區域也包括在內。

STEP 之外

原點附近的曲線 $y^2 = 2x^3$ 是一條半立方拋物線（semicubical parabola），是尖點的標準例子。每當一個平滑的參數化（parametrisation）在某一時刻速度為零，尖點便會出現：這裏 $(x, y) \approx (\frac{1}{2}\theta^2, \frac{1}{2}\theta^3)$ 在 $\theta = 0$ 處的導數為零。為代數曲線上這類奇點分類，正是代數幾何（algebraic geometry）的起點。極座標曲線及其面積亦自然地引向格林定理（Green's theorem），它把一個封閉區域的面積表示為沿其邊界的線積分（line integral）。若想從幾何角度認識這類曲線，可以參閱 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。