詳細解答

STEP III 2020，第 5 題

純數學 • 部分分式

> **STEP III 2020，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

開首的恆等式其實就是變了裝的有限等比級數（geometric series），而正是它把 $(1-(x/k)^n)/(x-k)$ 化成一個明確的多項式。這樣便可得到 $1/(x^n(x-k))$ 完整的部分分式分解（partial-fraction decomposition），而無須進行繁重的係數比較。接着求導，便得出含重複因子（repeated factor）$(x-k)^2$ 的分解；最後的積分只是其中一個特例，當中每一項都可以直接積分。

解答

開首的恆等式

展開右方，並把它拆成兩個和：

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r-1} &= \sum_{r=1}^{n} x^{n-r+1}y^{r-1} - \sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r} \\ &= (x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1}) - (x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n) \\ &= x^n - y^n,\end{aligned}$$

這是因為除了 x^n（來自第一個和中 $r=1$ 的項）和 y^n（來自第二個和中 $r=n$ 的項）之外，每一項都在兩個括號中各出現一次，因而互相抵消。

第 (i)(a) 部分

把 $\mathrm{F}(x) = \dfrac{A}{x-k} + \dfrac{\mathrm{f}(x)}{x^n}$ 兩邊乘以 $x^n(x-k)$，得

$$1 = Ax^n + \mathrm{f}(x)(x-k).$$

這是多項式之間的恆等式，對所有 $x \neq 0, k$ 成立，因此對所有 x 都成立（在無限多個點上相等的兩個多項式必然相同）。代入 $x = k$ 得 $1 = Ak^n$，所以 $A = 1/k^n$（這是容許的，因為 $k \neq 0$）。於是

$$\mathrm{f}(x)(x-k) = 1 - \frac{x^n}{k^n}, \qquad \text{所以} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{x-k}\left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n\right)$$

對 $x \neq k$ 成立，正如所求。

? **想一想** 怎樣才能把它化成分母不含 $x-k$ 的形式？

在開首的恆等式中，以 1 代替 x，以 x/k 代替 y：

$$1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{k}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{x}{k}\right)^{r-1} = -\frac{x-k}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}.$$

除以 $x-k$，

$$\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{f}(x)}{x^n} = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{r-1}x^{n+1-r}}.$$

（這亦證實了 f 確實是多項式。）現在以 $s = n+1-r$ 重新編號：當 r 取遍 $1, \ldots, n$ 時，它亦同樣取遍這些值；此時 $r - 1 = n - s$，而這個和變成 $\sum_{s=1}^{n} 1/(k^{n-s}x^s)$。因此

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{k^n(x-k)} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{n-r}x^r}.$$

第 (i)(b) 部分

由於 $x^n\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{x-k}$，用乘積法則（product rule）對兩邊求導，得

$$nx^{n-1}\mathrm{F}(x) + x^n\mathrm{F}'(x) = -\frac{1}{(x-k)^2}.$$

除以 $-x^n$（這沒有問題，因為 $x \neq 0$）：

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = -\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x).$$

由 (a) 部分，

$$-\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) = -\frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

而把 (a) 部分的結果逐項求導，得

$$-\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{k^{n-r}x^{r+1}} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \sum_{r=1}^{n}\frac{r}{k^{n+1-r}x^{r+1}}.$$

兩式相加，兩個和合併後得

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n}\frac{n-r}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

這就是所求的結果。

第 (ii) 部分

在 (b) 部分中取 $n = 3$ 及 $k = 1$。和式中 $r = 3$ 的項為零，於是

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x(x-1)} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

中間一項還需再拆一次：$\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$。在 $[2, N]$ 上所有項都連續，且 $x - 1 > 0$，因此在該區間上的一個原函數（antiderivative）是

$$G(x) = -\frac{1}{x-1} - 3\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2},$$

而

$$\int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = G(N) - G(2).$$

想一想 為甚麼必須把兩個對數放在一起？

分開來看，$-3\ln(N-1)$ 和 $+3\ln N$ 各自趨向無限大，所以不能逐項取極限。合併後，當 $N \to \infty$ 時 $\ln((N-1)/N) = \ln(1 - \frac{1}{N}) \to \ln 1 = 0$，因為 ln 在 1 處連續。$G(N)$ 的其餘三項顯然都趨向 0，所以 $G(N) \to 0$。

最後，

$$G(2) = -1 - 3\ln\tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{8} = 3\ln 2 - \tfrac{17}{8},$$

所以

$$\lim_{N\to\infty} \int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{17}{8} - 3\ln 2.$$

驗算

- 由於被積函數為正，答案必須是正數：確實 $\frac{17}{8} - 3\ln 2 \approx 2.1250 - 2.0794 = 0.0456$。
- 答案亦應該很小：被積函數在 $x = 2$ 時為 $\frac{1}{8}$，之後大約以 x^{-5} 的速度遞減。粗略地以 $\frac{1}{8}(2/x)^5$ 作上界，可知積分最多為 $\int_2^\infty 4x^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}$。數值積分亦證實其值為 0.045558…，準確至多個小數位。
- 在 (b) 部分中試取 $n = 1$。和式為零（它唯一的一項有 $n - r = 0$），而右方為 $\dfrac{1}{k(x-k)^2} - \dfrac{1}{xk(x-k)} = \dfrac{x-(x-k)}{xk(x-k)^2} = \dfrac{1}{x(x-k)^2}$，與預期一致。

常見錯誤

- 把 $1 - x/k$ 寫成 $-(x-k)/k$ 時弄錯正負號。

- 在 (a) 部分忘記把和式重新編號，結果 k 和 x 的冪次與目標不符。
- 把 $\ln\big((x-1)/x\big)$ 拆成兩個對數，然後聲稱積分發散，或者寫出「$\infty - \infty = 0$」。

STEP 之外

你所建立的，正是對形如 x^n 和 $(x-k)^m$ 的因子的一般部分分式分解；對 x 求導（或對根 k 求導）是產生重複因子項的標準方法。判斷無限區間上的積分是否收斂（如第 (ii) 部分），是大學第一門分析課程中瑕積分（improper integrals）的課題。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對這類極限有細緻的處理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。