詳細解答

STEP III 2020，第 4 題

純數學 • 反射矩陣與旋轉矩陣

STEP III 2020，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

開首那個結果，其實就是整道題目的化身。減去 $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ 會把一點直接垂直移到平面上，所以減去兩倍這個量，就會把它移到平面另一邊同樣距離之處，這正是反射（reflection）。一旦把反射寫成 $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$，它的矩陣（matrix）、繞 $\mathbf{n}$ 的半轉（half-turn），以及兩者的乘積，都只需很少計算便可得出。

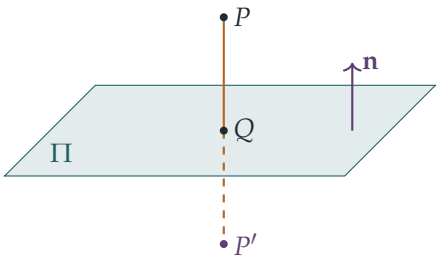
解答

開首的結果

設 $\mathbf{q}=\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$。由於 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$，

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=0,$$

所以 Q 位於 Π 上。此外，$\overrightarrow{PQ}=\mathbf{q}-\mathbf{x}=-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$，是法向量（normal）$\mathbf{n}$ 的倍數。由於 P 不在 Π 上（因此 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\neq 0$），這個向量不是零向量。故此 PQ 垂直於 Π，得證。



這幅圖也顯示了我們的方向：P 在 Π 中的鏡像 P' 位於 Q 另一邊，與 Q 的距離等於 P 在

Q 上方的距離，所以它的位置向量（position vector）是

$$\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$

（若 P 在 Π 上，這條公式給出 P 本身，同樣正確。）

第 (i) 部分

取 $\mathbf{n} = (a,b,c)^{\mathsf{T}}$，由於 $a^2+b^2+c^2 = 1$，它是單位法向量（unit normal）。對於 $\mathbf{i}$，有 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{n} = a$，所以

$$T(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2a\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix},$$

其中第一個分量用了 $1 = a^2+b^2+c^2$。這就是所求的像。同理，利用 $\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} = b$ 及 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = c$，

$$T(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix}-2ab\\a^2+c^2-b^2\\-2bc\end{pmatrix}, \qquad T(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix}-2ac\\-2bc\\a^2+b^2-c^2\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{M}$ 的各行（column）就是 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 的像，所以

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & a^2+c^2-b^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2\end{pmatrix} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}.$$

第 (ii) 部分

把已知矩陣與 $\mathbf{M}$ 對比，並把各對角元素寫成 $1-2a^2$、$1-2b^2$、$1-2c^2$：

$$1-2a^2 = 0.64, \quad 1-2b^2 = 0.36, \quad 1-2c^2 = 0 \implies a^2 = 0.18, \quad b^2 = 0.32, \quad c^2 = 0.5.$$

所以 $|a| = \frac{3}{5\sqrt{2}}$、$|b| = \frac{4}{5\sqrt{2}}$ 及 $|c| = \frac{5}{5\sqrt{2}}$。

想一想 對角線只給出 a^2,b^2,c^2。我們怎樣確定正負號？

非對角元素給出各乘積：

$$-2ab = 0.48, \quad -2ac = 0.6, \quad -2bc = -0.8 \implies ab = -0.24, \quad ac = -0.3, \quad bc = 0.4.$$

所以 b 與 c 同號，而 a 與它們異號。把 (a,b,c) 換成 $(-a,-b,-c)$ 不會改變任何東西（仍是同一個平面），所以可取 $c>0$，得

$$(a,b,c) = \tfrac{1}{5\sqrt{2}}(-3,\,4,\,5).$$

這些值給出 $ab = -\frac{12}{50}$、$ac = -\frac{15}{50}$ 及 $bc = \frac{20}{50}$，因此全部六個獨立元素都吻合。兩邊乘以 $-5\sqrt{2}$，平面為

$$3x - 4y - 5z = 0.$$

第 (iii) 部分

把任何向量分拆為 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})$，即沿軸的部分加上垂直於軸的部分（由開首的結果可知）。繞軸旋轉 π 會保持第一部分不變，並把第二部分反向，所以

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}) = 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{x}.$$

這正是 $-T(\mathbf{x})$。因此 $\mathbf{N} = 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} - \mathbf{I} = -\mathbf{M}$，即

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & b^2 - a^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & c^2 - a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

第 (iv) 部分

> **想一想** 這裏我們需要把兩個以 a、b、c 表示的 3×3 矩陣相乘嗎？

不需要。由 (iii)，$\mathbf{NM} = -\mathbf{M}^2$。在同一平面中反射兩次，會把每一點帶回原處，所以 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$。（從代數上看，由於 $\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n} = 1$，$(\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}})^2 = \mathbf{I} - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} + 4\mathbf{n}(\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n})\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$。）因此

$$\mathbf{NM} = -\mathbf{I},$$

它把每個 $\mathbf{x}$ 映射到 $-\mathbf{x}$。這是關於原點的反射，又稱為中心反演（central inversion），或以原點為中心、比例因子為 -1 的放大（enlargement）。留意它完全不依賴 a、b 或 c。

驗算

- $\mathbf{M}$ 的每一行都應是單位向量。以第一行為例，$(b^2+c^2-a^2)^2 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 = (b^2 + c^2 + a^2)^2 = 1$。
- 在 (ii) 中，法向量 $(3,-4,-5)$ 應被映射到其負向量。已知矩陣把它映射到 $(1.92 - 1.92 - 3,\ 1.44 - 1.44 + 4,\ 1.8 + 3.2) = (-3,4,5)$。正確。
- 取 $\mathbf{n} = \mathbf{k}$，則 $\mathbf{M} = \operatorname{diag}(1,1,-1)$，即在 $z = 0$ 中的反射，而 $\mathbf{N} = \operatorname{diag}(-1,-1,1)$，即繞 z 軸的半轉。兩者的乘積顯然是 $-\mathbf{I}$。
- 用電腦以 1000 個隨機單位向量 $\mathbf{n}$ 驗算，確認了 $\mathbf{M}$ 的公式、$\mathbf{N}$ 保持 $\mathbf{n}$ 不變並把垂直向量反向，以及 $\mathbf{NM} = -\mathbf{I}$。(ii) 中的矩陣亦在 10^{-15} 的誤差內重現。

常見錯誤

- 把 $\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ 當作反射。這其實是垂足（foot of the perpendicular），漏了因子 2。
- 在 (ii) 中，從平方根獨立地選取 a, b, c 的正負號。只有非對角元素才能確定它們之間的相對正負號。
- 說 $\mathbf{NM}$ 是「恆等矩陣」。反射的行列式（determinant）是 -1，旋轉的行列式是 $+1$，所以乘積的行列式是 -1。在三維中 $\det(-\mathbf{I}) = -1$，兩者一致。

STEP 之外

矩陣 $\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ 稱為豪斯霍爾德反射（*Householder reflection*）。數值線性代數經常用它把矩陣化為三角形式，而且 n 維中的每個正交矩陣（orthogonal matrix）都是最多 n 個這類反射的乘積。第 (iv) 部分是這個結構的一個小例子：在 $\mathbb{R}^3$ 中，半轉與在垂直平面中的反射複合，得出 $-\mathbf{I}$。關於正交矩陣、投影和反射，可參閱 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。