詳細解答

STEP III 2020，第 3 題

純數學 • 幾何中的複數

STEP III 2020，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

在複數平面（complex plane）上，以 a 為中心、轉角為 θ 的旋轉（rotation）不過就是 $z \mapsto a + (z-a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，因此 G_{AB} 是 a 和 b 的一個明確的線性組合（linear combination）。一旦第 (i) 部分給出這條公式，幾何問題便化為代數問題：平行四邊形（parallelogram）是頂點所滿足的一個線性條件，而等邊三角形（equilateral triangle）則是某一邊等於另一邊轉過一個固定角度。整道題目只建基於關於 ω 的冪的幾個事實。

解答

全文中，$\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$，故 $\omega^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$，並記

$$\rho = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

我們會用到以下三個事實：

$$\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \qquad \omega^3 = \mathrm{i}, \qquad \omega - \omega^* = 2\mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6} = \mathrm{i}.$$

第 (i) 部分

順時針（clockwise）旋轉 $\frac{1}{3}\pi$ 相當於乘以 ρ。以 A 為中心旋轉，意思是把位移（displacement）$b-a$ 旋轉，再加回到 a 上，所以

$$k = a + (b-a)\rho.$$

因此 ABK 的形心（centroid）為

$$g_{ab} = \tfrac{1}{3}(a+b+k) = \tfrac{1}{3}[(2-\rho)\,a + (1+\rho)\,b].$$

接着整理兩個係數：

$$2-\rho=\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{3}\,\omega,$$
$$1+\rho=\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{3}\,\omega^*.$$

於是

$$g_{ab}=\tfrac{1}{3}(\sqrt{3}\,\omega a+\sqrt{3}\,\omega^* b)=\frac{1}{\sqrt{3}}(\omega a+\omega^* b),$$

此即所求。

第 (ii) 部分

四邊形（quadrilateral）$PQRS$（頂點依此次序排列）是平行四邊形，當且僅當 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$，即 $q-p=r-s$，亦即

$$p-q+r-s=0.$$

（這等同於說對角線（diagonal）PR 與 QS 有相同的中點（midpoint）。）所以 Q_1 是平行四邊形當且僅當 $a-b+c-d=0$，而 Q_2 是平行四邊形當且僅當

$$g_{ab}-g_{bc}+g_{cd}-g_{da}=0.$$

對四個點各自運用第 (i) 部分的結果，

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\,(g_{ab}-g_{bc}+g_{cd}-g_{da})&=(\omega a+\omega^* b)-(\omega b+\omega^* c)+(\omega c+\omega^* d)-(\omega d+\omega^* a)\\&=(\omega-\omega^*)a-(\omega-\omega^*)b+(\omega-\omega^*)c-(\omega-\omega^*)d\\&=\mathrm{i}\,(a-b+c-d).\end{aligned}$$

因此

$$g_{ab}-g_{bc}+g_{cd}-g_{da}=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\,(a-b+c-d),$$

由於 $\mathrm{i}/\sqrt{3}\neq 0$，一邊為零當且僅當另一邊為零。所以 Q_1 是平行四邊形當且僅當 Q_2 是平行四邊形。

想一想 Q_2 有沒有可能滿足平行四邊形條件，卻退化成有兩個頂點重合？

有的，在一個特殊情況下會發生。若 ABC 是一個按順時針標記的等邊三角形，那麼把 B 繞 A 順時針旋轉便會落在 C 上，因此 G_{AB} 和 G_{BC} 都是 ABC 的形心。把它補成菱形（rhombus）$ABCD$，Q_2 就壓扁成一條線段。此時條件 $p-q+r-s=0$ 仍然成立，所以這個等價關係實際上是關於這個向量條件的陳述，而在這類題目中，「平行四邊形」指的正是這個條件。

第 (iii) 部分

我們證明 T_2 的某一邊（作為向量）等於另一邊轉過一個固定角度。由第 (i) 部分，

$$\sqrt{3}\,(g_{bc}-g_{ab}) = (\omega b+\omega^* c)-(\omega a+\omega^* b) = -\omega a+\mathrm{i}\,b+\omega^* c,$$
$$\sqrt{3}\,(g_{ca}-g_{bc}) = (\omega c+\omega^* a)-(\omega b+\omega^* c) = \omega^* a-\omega b+\mathrm{i}\,c,$$

每一行都用了 $\omega-\omega^*=\mathrm{i}$。

? **想一想** 哪個數 λ 能把第二個括號變成第一個？

比較 a 的係數，必須有 $\lambda\omega^*=-\omega$，所以 $\lambda=-\omega/\omega^*=-\omega^2=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}=\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}$。同一個 λ 對 b 和 c 亦適用：

$$\lambda\cdot(-\omega)=\omega^3=\mathrm{i},$$
$$\lambda\cdot\mathrm{i}=-\omega^2\cdot\omega^3=-\omega^5=-\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/6}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}=\omega^*.$$

因此，對所有 a、b、c，

$$g_{bc}-g_{ab}=\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\,(g_{ca}-g_{bc}).$$

取模（modulus），由於 $|\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}|=1$，得 $G_{AB}G_{BC}=G_{BC}G_{CA}$。此外，沿 T_2 行進的方向在 G_{BC} 處轉過 $\frac{2}{3}\pi$，所以 T_2 在 G_{BC} 處的內角（interior angle）為 $\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi$。一個三角形若有兩條相等的邊夾着 $\frac{1}{3}\pi$ 的角，便是等腰（isosceles）三角形，其底角為 $\frac{1}{2}(\pi-\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{3}\pi$，所以三個角都是 $\frac{1}{3}\pi$，T_2 是等邊三角形。

唯一的例外是 $g_{ca}=g_{bc}$ 的情況，此時上述關係亦給出 $g_{ab}=g_{bc}$，所以 T_2 縮成一點。把 $\omega^*a-\omega b+\mathrm{i}c=0$ 乘以 ω，得 $a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}b+\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}c=0$，這恰好在 ABC 本身是按順時針標記的等邊三角形時發生（正如第 (ii) 部分的備註所述）。其他任何三角形 T_1（包括退化（degenerate）三角形）都給出一個真正的等邊三角形 T_2。

驗算

- 取 $a=0$、$b=1$。則 $k=\rho$，而 $0,1,\rho$ 的形心為 $\frac{1}{3}(1+\rho)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$。公式給出 $\omega^*/\sqrt{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{i}$，是同一個數。
- 取 $a=0$、$b=1$、$c=\mathrm{i}$（一個直角三角形），T_2 三個點兩兩之間的距離都約為 1.1154。以電腦對 10^4 個隨機三角形和四邊形進行檢驗，在捨入誤差範圍內證實了第 (ii) 和第 (iii) 部分的恆等式。

常見錯誤

- 把 b 繞原點而非繞 A 旋轉，寫成 $k=b\rho$。

- 用 $e^{+i\pi/3}$ 表示順時針旋轉。順時針是負方向。
- 在第 (ii) 部分只證明了一個方向。正是因子 $i/\sqrt{3}$ 不為零，才得出「當且僅當」。

STEP 之外

第 (iii) 部分就是拿破崙定理（Napoleon's theorem）。在任意三角形的各邊上作等邊三角形（這裏當 *ABC* 按逆時針標記時是向外作），它們的形心構成一個等邊三角形。複數證明之所以奏效，是因為旋轉和形心都是平面的線性映射（linear map）。這正是研究幾何中變換羣（transformation group）的起點。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）對複數乘法的這種幾何觀點有十分精彩的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。