詳細解答

STEP III 2020，第 2 題

純數學 • 雙曲函數曲線描繪

STEP III 2020，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

進行隱函數求導（implicit differentiation），並反覆利用 $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$ 把一切化回 sinh 的形式：這樣二階導數的條件便可以因式分解，而其中一個因子正是曲線本身的方程。至於直線 $x + y = a$，代入 $y = a - x$ 並把所有項寫成指數形式；要有實數交點，判別式（discriminant）必須非負，由此便得出 $\cosh a$ 的界限。

解答

第 (i) 部分

由於 sinh 是 $\mathbb{R}$ 上的雙射（bijection），對每個 x，恰好有一個 y 使 $\sinh y = 2k - \sinh x$。因此 C 是函數 $y = \operatorname{arsinh}(2k - \sinh x)$ 的圖像，對所有實數 x 均有定義，我們可以進行隱函數求導：

$$\cosh x + \cosh y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\cosh x}{\cosh y}.$$

由於 $\cosh x \geq 1$，斜率（gradient）永不為零（它總是負數），所以 C 沒有駐點（stationary point）。

再求導一次，記 $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，得

$$\sinh x + \sinh y \, (y')^2 + \cosh y \, y'' = 0.$$

代入 $y' = -\cosh x / \cosh y$，並在兩邊乘以 $\cosh^2 y$：

$$\begin{aligned}\cosh^3 y\, y'' &= -\left(\sinh x \cosh^2 y + \sinh y \cosh^2 x\right)\\ &= -\left(\sinh x\,(1+\sinh^2 y) + \sinh y\,(1+\sinh^2 x)\right)\\ &= -(\sinh x + \sinh y) - \sinh x \sinh y\,(\sinh y + \sinh x)\\ &= -(\sinh x + \sinh y)(1 + \sinh x \sinh y).\end{aligned}$$

在 C 上，第一個因子等於 $2k$，所以

$$y'' = -\frac{2k\,(1+\sinh x \sinh y)}{\cosh^3 y}.$$

由於 $k > 0$ 且 $\cosh y > 0$，可知 $y'' = 0$ 當且僅當 $1 + \sinh x \sinh y = 0$，此即所求。

想一想 單憑 $y'' = 0$ 足以斷定該點是拐點嗎？

不足夠：我們還需要 y'' 變號。設 $s = \sinh x$ 及 $t = \sinh y$。在 $y'' = 0$ 的點上，我們有 $s + t = 2k$ 及 $st = -1$，所以 s 和 t 是 $u^2 - 2ku - 1 = 0$ 的兩個根：

$$u = k \pm \sqrt{k^2+1}.$$

一個根為正，另一個為負；s 可取其中任一個值，t 則取另一個。沿着曲線，$1 + st = 1 + s(2k - s) = -(s^2 - 2ks - 1)$ 是 s 的二次式，有兩個單根，所以在每個根處都會變號。由於 $s = \sinh x$ 是 x 的遞增函數，y'' 在這兩點的確會變號。因此拐點（point of inflection）為

$$\left(\operatorname{arsinh}(k+\sqrt{k^2+1}),\ \operatorname{arsinh}(k-\sqrt{k^2+1})\right) \quad \text{及}$$
$$\left(\operatorname{arsinh}(k-\sqrt{k^2+1}),\ \operatorname{arsinh}(k+\sqrt{k^2+1})\right).$$

它們互為關於 $y = x$ 的反射，這正合預期，因為 C 的方程對 x 和 y 是對稱的。

第 (ii) 部分

在直線上，$y = a - x$。利用 $2\sinh u = \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}$，把 C 的方程乘以 2 後變成

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{a-x} - \mathrm{e}^{x-a} = 4k.$$

乘以 e^x 得 $\mathrm{e}^{2x} - 1 + \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{2x-a} = 4k\mathrm{e}^x$，即

$$\mathrm{e}^{2x}(1 - \mathrm{e}^{-a}) - 4k\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^a - 1) = 0,$$

此即所求的方程。

想一想 這樣的點存在，對這個方程意味着甚麼？

它是 $X = \mathrm{e}^x$ 的二次方程（只要首項係數不為零），而且必須有實根。

首先，$a \neq 0$：若 $a = 0$，方程會退化為 $-4k\mathrm{e}^x = 0$，由於 $k > 0$，這是不可能的。因此 $\cosh a > 1$。

當 $a \neq 0$ 時，首項係數 $1 - \mathrm{e}^{-a}$ 不為零，所以該二次方程有實根，僅當其判別式非負：

$$16k^2 - 4(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) \geq 0.$$

而 $(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) = \mathrm{e}^a - 2 + \mathrm{e}^{-a} = 2\cosh a - 2$，所以條件為 $16k^2 \geq 8(\cosh a - 1)$，即 $\cosh a \leq 2k^2 + 1$。合起來，

$$1 < \cosh a \leq 2k^2 + 1.$$

所以 C 上每一點的 $x + y$ 都介乎 $-2\operatorname{arsinh} k$ 與 $2\operatorname{arsinh} k$ 之間（因為 $\cosh(2\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2\sinh^2(\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2k^2$），而且 $x + y \neq 0$。

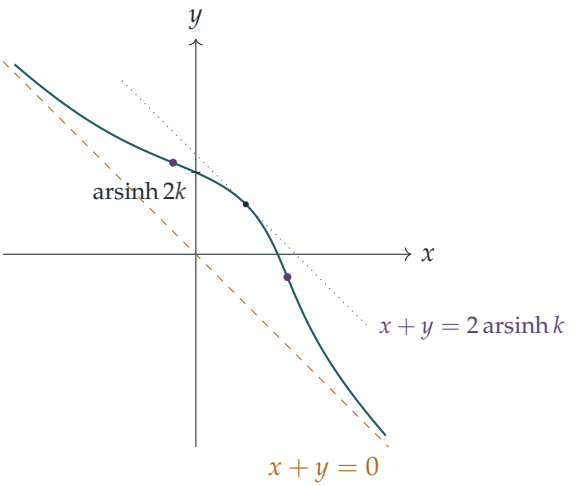
事實上，在 C 上 $x + y > 0$。若 $a < 0$，則 $1 - \mathrm{e}^{-a} < 0$ 且 $\mathrm{e}^a - 1 < 0$，所以該二次方程的三個係數全是負數，因而沒有正根 X。（等價地，$\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$，其正負號與 $x + y$ 相同。）最大值 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ 出現在 $x = y = \operatorname{arsinh} k$，此時判別式為零，直線剛好與 C 相切。

第 (iii) 部分

綜合已知的結果：

- C 關於直線 $y = x$ 對稱，並只在 $(\operatorname{arsinh} k, \operatorname{arsinh} k)$ 與之相交，該處的斜率為 -1。
- y 對所有 x 均有定義，且斜率總是負數。曲線與坐標軸相交於 $(\operatorname{arsinh} 2k, 0)$ 及 $(0, \operatorname{arsinh} 2k)$。
- $0 < x + y \leq 2\operatorname{arsinh} k$，所以 C 位於直線 $x + y = 0$ 上方、直線 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ 上或其下方的帶狀區域內，而後者在 C 位於 $y = x$ 上的那一點與 C 相切。
- 當 $x \to +\infty$，$\sinh y = 2k - \sinh x \to -\infty$，且 $\mathrm{e}^{-y} \approx \mathrm{e}^x - 4k$，所以 $x + y \approx -\ln(1 - 4k\mathrm{e}^{-x}) \approx 4k\mathrm{e}^{-x} \to 0^+$。由對稱性，當 $x \to -\infty$ 時情況相同。因此 $x + y = 0$ 是曲線兩端的漸近線（asymptote），曲線從上方趨近它。
- 由 y'' 的公式可知，在兩個拐點之間，即 $1 + \sinh x \sinh y > 0$ 之處（例如 $y = x$ 上的那一點），曲線是凹的（concave，位於其切線下方）；在兩個拐點以外，曲線是凸的（convex）。

下圖顯示 $k = 1$ 的情況，並標出了拐點。



驗算

- 當 $k = 1$，拐點位於 $\left(\operatorname{arsinh}(1+\sqrt{2}), \operatorname{arsinh}(1-\sqrt{2})\right) \approx (1.615, -0.403)$ 及其鏡像；在兩側計算 $y = \operatorname{arsinh}(2 - \sinh x)$ 的二階差分，確認 y'' 在該處變號；在 $-8 \le x \le 8$ 範圍內掃描，找不到 y'' 的其他零點。
- 公式 $y'' = -2k(1 + \sinh x \sinh y)/\cosh^3 y$ 在許多隨機點、對多個 k 值，都與數值二階導數吻合。
- 當 $k = 1$ 及 $x = 6$，$x + y \approx 0.00996$，接近預測值 $4\mathrm{e}^{-6} \approx 0.00992$：一如所述，曲線從上方趨近漸近線。
- 在 $x = y = \operatorname{arsinh} k$，$\cosh(x+y) = 1 + 2\sinh^2 x = 1 + 2k^2$：第 (ii) 部分的上界可以達到。

常見錯誤

- 只得出 $y'' = 0$ 便停下，沒有檢查 y'' 是否變號。這裏它確實變號，但必須說明。
- 忘記排除 $a = 0$，而正是這一點令左邊的不等式成為嚴格不等式。
- 只寫出一個拐點。$u^2 - 2ku - 1 = 0$ 的任一個根都可以是 $\sinh x$，因此得出兩個關於 $y = x$ 互為鏡像的點。

STEP 之外

旋轉後的坐標 $u = x + y$、$v = x - y$ 令這條曲線一目了然：恆等式 $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{u}{2}\cosh\frac{v}{2}$ 把 C 化為 $\sinh\frac{u}{2} = k\,\mathrm{sech}\frac{v}{2}$，即在漸近線 $u = 0$ 上方的單一隆起。選取與對稱性相配合的坐標，是大學一年級微積分和線性代數中貫穿始終的主題（把二次型（quadratic form）對角化正是同一個想法）。隱函數曲線，以及方程 $F(x, y) = 0$ 在甚麼情況下真正把 y 定義為 x 的光滑函數，是隱函數定理（implicit function theorem）的研究對象；Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）對其背後的單變量分析有嚴謹的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。