詳細解答

STEP III 2020，第 12 題

概率與統計 • 幾何分佈的獨立性

> **STEP III 2020，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

所有隨機變量都是獨立幾何分佈隨機變量（geometric random variables）對 (X, Y) 的函數，而且 $\mathrm{P}(X = x,\, Y = y) = p^2 q^{x+y-2}$。處理和與差時，最好沿着 (x, y) 網格中的一條直線把這個聯合概率（joint probability）加起來；處理最大值與最小值時，則最容易透過累積概率（cumulative probability），例如 $\mathrm{P}(T \le t)$。至於獨立性（independence），可留意某個變量是否有一個取值能完全確定另一個變量。

解答

由於 A 一直擲到第一次出現正面為止，當首 $k-1$ 次都是反面而第 k 次是正面時，X 取值 $k \ge 1$：

$$\mathrm{P}(X = k) = pq^{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

Y 亦然。兩位參與者各自獨立擲幣，所以 X 與 Y 互相獨立，並且

$$\mathrm{P}(X = x,\, Y = y) = p^2 q^{x+y-2} \qquad (x, y \ge 1).$$

有兩個事實我們會反覆用到：$\mathrm{P}(X > k) = q^k$（首 k 次全是反面），所以 $\mathrm{P}(X \le k) = 1 - q^k$；以及 $1 - q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$。

第 (i) 部分

和。S 的取值為 $s \ge 2$。要 $S = s$，需要 $X = x$ 及 $Y = s - x$，其中 $1 \le x \le s-1$。這 $s-1$ 個結果每個的概率都是 $p^2 q^{s-2}$，因此

$$\mathrm{P}(S = s) = (s-1) p^2 q^{s-2}, \qquad s = 2, 3, 4, \ldots$$

最大值。$T \le t$ 當且僅當 $X \le t$ 與 $Y \le t$ 同時成立，所以由獨立性得 $\mathrm{P}(T \le t) = (1-q^t)^2$。因此，對 $t \ge 1$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=t) &= \mathrm{P}(T \le t) - \mathrm{P}(T \le t-1) = (1-q^t)^2 - (1-q^{t-1})^2 \\ &= [(1-q^t)-(1-q^{t-1})][(1-q^t)+(1-q^{t-1})] \\ &= (q^{t-1}-q^t)(2-q^{t-1}-q^t) \\ &= pq^{t-1}(2-q^{t-1}-q^t),\end{aligned}$$

這裏用了 $q^{t-1}-q^t = q^{t-1}(1-q) = pq^{t-1}$。這就是所求的結果。（當 $t=1$ 時，公式給出 $p(1-q)=p^2$，是正確的。）

第 (ii) 部分

差。要 $U=0$，需要對某個 $k \ge 1$ 有 $X=Y=k$：

$$\mathrm{P}(U=0) = \sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{p(1+q)} = \frac{p}{1+q}.$$

對 $u \ge 1$，要麼 $Y = X+u$，要麼 $X = Y+u$；這兩種情況互斥，而且由對稱性可知概率相等，所以

$$\mathrm{P}(U=u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(X=k, Y=k+u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2k+u-2} = \frac{2p^2q^u}{1-q^2} = \frac{2pq^u}{1+q}.$$

最小值。$W > w$ 當且僅當 $X > w$ 與 $Y > w$ 同時成立，所以 $\mathrm{P}(W > w) = q^{2w}$，而對 $w \ge 1$，

$$\mathrm{P}(W=w) = \mathrm{P}(W > w-1) - \mathrm{P}(W > w) = q^{2w-2} - q^{2w} = (1-q^2)\,q^{2(w-1)}.$$

所以 W 本身也服從幾何分佈，其「成功」概率為 $1-q^2$：A 和 B 各擲一次為一輪，每輪至少出現一次正面的概率是 $1-q^2$。

第 (iii) 部分

若 $S=2$，由於 $X, Y \ge 1$，必然有 $X=Y=1$，於是 $T=1$。所以 $S=2$ 與 $T=3$ 不可能同時發生：

$$\mathrm{P}(S=2 \text{ 且 } T=3) = 0.$$

另一方面，$\mathrm{P}(S=2) = p^2 > 0$，而 $\mathrm{P}(T=3) = pq^2(2-q^2-q^3) > 0$，因為 $0<q<1$ 給出 $q^2+q^3<2$。因此 $\mathrm{P}(S=2)\times\mathrm{P}(T=3) > 0$，兩邊並不相等。

第 (iv) 部分

U 與 W 互相獨立。我們須證明對每個 $u \ge 0$ 及 $w \ge 1$，都有 $\mathrm{P}(U=u, W=w) = \mathrm{P}(U=u)\,\mathrm{P}(W=w)$。知道 U 和 W 兩者，就知道較小的值是 w，較大的值是 $w+u$。

想一想 哪些數對 (X,Y) 會給出 $U=u$ 及 $W=w$？

若 $u=0$，唯一的數對是 (w,w)。若 $u\geq 1$，則恰好有兩個：$(w,\,w+u)$ 和 $(w+u,\,w)$，每個的概率都是 p^2q^{2w+u-2}。

當 $u=0$，$\mathrm{P}(U=0,\,W=w)=p^2q^{2w-2}$，而

$$\mathrm{P}(U=0)\,\mathrm{P}(W=w)=\frac{p}{1+q}\cdot p(1+q)\,q^{2w-2}=p^2q^{2w-2}.$$

當 $u\geq 1$，$\mathrm{P}(U=u,\,W=w)=2p^2q^{2w+u-2}$，而

$$\mathrm{P}(U=u)\,\mathrm{P}(W=w)=\frac{2pq^u}{1+q}\cdot p(1+q)\,q^{2w-2}=2p^2q^{2w+u-2}.$$

兩者在所有情況下都相等，所以 U 與 W 互相獨立。

其他各對都不獨立。餘下的各對是 (S,T)、(S,U)、(S,W)、(T,U) 及 (T,W)。要證明兩個變量不獨立，只需找到一對取值使得 $\mathrm{P}(A=a,\,B=b)\neq\mathrm{P}(A=a)\,\mathrm{P}(B=b)$ 便足夠。

想一想 S 或 T 的哪一個取值能確定其餘一切？

事件 $S=2$ 與事件 $T=1$ 是同一個事件 $\{X=Y=1\}$，其概率為 $p^2>0$；在此事件上 $T=1$、$U=0$ 及 $W=1$。由於 $0<p,q<1$，根據第 (i) 及 (ii) 部分的公式，下列清單中 T、U、W 的每個取值都有正概率。所以：

- (S,T)：$\mathrm{P}(S=2,\,T=3)=0\neq\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(T=3)$，見第 (iii) 部分；
- (S,U)：$\mathrm{P}(S=2,\,U=1)=0$，但 $\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(U=1)>0$；
- (S,W)：$\mathrm{P}(S=2,\,W=2)=0$，但 $\mathrm{P}(S=2)\,\mathrm{P}(W=2)>0$；
- (T,U)：$\mathrm{P}(T=1,\,U=1)=0$，但 $\mathrm{P}(T=1)\,\mathrm{P}(U=1)>0$；
- (T,W)：$\mathrm{P}(T=1,\,W=2)=0$，但 $\mathrm{P}(T=1)\,\mathrm{P}(W=2)>0$。

所以在 S、T、U、W 之中，只有 U 與 W 這一對是互相獨立的。

驗算

- 每個分佈的總和都是 1：例如 $\sum_{t\geq 1}\mathrm{P}(T=t)$ 經裂項相消（telescoping）後等於 $\lim(1-q^t)^2=1$，而 $\frac{p}{1+q}+\sum_{u\geq 1}\frac{2pq^u}{1+q}=\frac{p}{1+q}\left(1+\frac{2q}{p}\right)=\frac{p+2q}{1+q}=1$。
- 取 $p=q=\frac{1}{2}$：$\mathrm{P}(T=2)=\frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}$，與逐一列出三個結果 $(1,2),(2,1),(2,2)$ 的概率 $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ 吻合。
- 取 $p=q=\frac{1}{2}$，$\mathrm{P}(U=1,\,W=1)=\mathrm{P}\{(1,2),(2,1)\}=\frac{1}{4}$，而 $\mathrm{P}(U=1)\,\mathrm{P}(W=1)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，正符合獨立性的要求。

- 所有公式以及 U 與 W 的獨立性，都已用電腦對 $p = 0.3$、0.55 及 0.8 把聯合分佈加總而得到驗證。

常見錯誤

- 在 $u \geq 1$ 時漏掉 $\mathrm{P}(U = u)$ 中的因子 2，或在 $u = 0$ 時錯誤地加上它——此時 $X = Y$ 只算一次。
- 嘗試直接把各種情況相加來求 $\mathrm{P}(T = t)$，結果把 $X = Y = t$ 重複計算；用累積概率的方法可避免這個問題。
- 以為檢查一對取值就能證明獨立：證明獨立需要對*所有* u 和 w 成立，而只要有一處不成立便足以說明不獨立。

STEP 之外

U 與 W 互相獨立，正是無記憶性（memoryless property）的離散形式：一旦第一次正面在時間 W 出現，另一位參與者餘下的等待時間就是一個全新的幾何分佈隨機變量，與之前等了多久無關。在連續的情況下，對應的結果是：對獨立的指數分佈（exponential distribution）隨機變量而言，最小值與「最大值和最小值之差」互相獨立；這是泊松過程（Poisson process）和排隊論（queueing theory）的基礎。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）對這些概念有深入的發展。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。