詳細解答

STEP III 2020，第 11 題

概率與統計 • 隨機變量的函數

> **STEP III 2020，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

嚴格遞減（strictly decreasing）函數會把不等式反向；又因為 f 是自己的反函數（inverse），我們可以把它同時作用於 $\mathrm{f}(X) \leq y$ 的兩邊，得到一個只關於 X 的事件。期望值（expectation）則由分部積分（integration by parts）求得，這一步把 f′ 換成 f。在第 (ii) 部分，Z 與 X 之間的關係對兩個變量是對稱的，所以 $Z = \mathrm{f}(X)$，其中 f 是自反函數（self-inverse function），於是可以套用第 (i) 部分。所求的不等式其實只是「方差（variance）為正」這個事實。

解答

第 (i) 部分

由於 f^{-1} 在整個 $[a, b]$ 上都有定義，f 是 $[a, b]$ 到自身的雙射（bijection），所以 Y 的取值在 $[a, b]$ 之內。固定 $y \in [a, b]$。因為 f 嚴格遞減，把它作用於不等式的兩邊會使不等式反向，而且 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$。因此，對於 $x \in [a, b]$，

$$\mathrm{f}(x) \leq y \iff \mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) \geq \mathrm{f}(y) \iff x \geq \mathrm{f}(y).$$

（反方向的蘊涵同理成立，只需把 f 作用於 $x \geq \mathrm{f}(y)$。）由於 X 在 $[a, b]$ 上均勻分佈（uniform），且 $\mathrm{f}(y) \in [a, b]$，

$$\mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X \geq \mathrm{f}(y)) = \frac{b - \mathrm{f}(y)}{b - a},$$

此即所求。

求導後，Y 的概率密度函數（probability density function）為

$$g(y) = -\frac{\mathrm{f}'(y)}{b-a} \quad \text{當} a \le y \le b,$$

其餘情況下為零。由於 f 遞減，這個函數非負。接着，取 $u = y^2$ 及 $\mathrm{d}v = -\mathrm{f}'(y)\,\mathrm{d}y$ 進行分部積分，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y^2) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b y^2(-\mathrm{f}'(y))\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{b-a}\Big[-y^2\mathrm{f}(y)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{-b^2a + a^2b}{b-a} + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

其中用到 $\mathrm{f}(b) = a$ 及 $\mathrm{f}(a) = b$。第一項等於 $-ab(b-a)/(b-a) = -ab$。把啞變量（dummy variable）y 改記為 x，得

$$\mathrm{E}(Y^2) = -ab + \int_a^b \frac{2x\,\mathrm{f}(x)}{b-a}\,\mathrm{d}x.$$

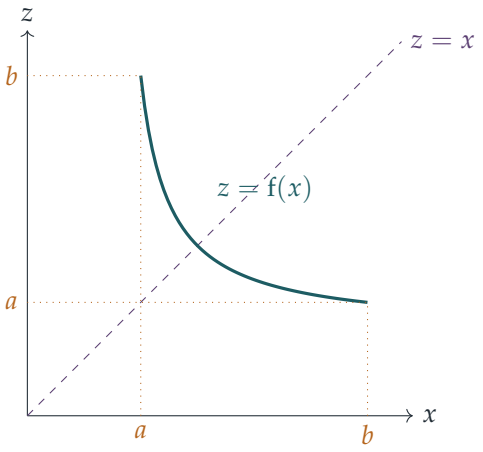
第 (ii) 部分

注意由 $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 得 $c = \dfrac{ab}{a+b}$，又因 $\frac{1}{c} > \frac{1}{a}$，所以 $c < a$。解出 Z：

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{c} - \frac{1}{X} = \frac{X-c}{cX}, \qquad \text{所以} \qquad Z = \mathrm{f}(X) \text{，其中 } \mathrm{f}(x) = \frac{cx}{x-c}.$$

由於 $x \ge a > c$，分母在 $[a,b]$ 上為正。我們驗證 f 滿足第 (i) 部分的三個條件。

- $\frac{1}{\mathrm{f}(a)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$，所以 $\mathrm{f}(a) = b$。同理 $\frac{1}{\mathrm{f}(b)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$，所以 $\mathrm{f}(b) = a$。
- $\frac{1}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上為正且嚴格遞增，所以 $\mathrm{f}(x)$ 在該區間上嚴格遞減。
- 關係式 $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$ 對 x 與 z 是對稱的。所以 $z = \mathrm{f}(x)$ 當且僅當 $x = \mathrm{f}(z)$，即 $\mathrm{f} = \mathrm{f}^{-1}$。



f 的圖像由 (a,b) 延伸至 (b,a)，並且關於直線 $z=x$ 對稱——自反函數理應如此。

想一想 為甚麼除了 $\mathrm{E}(Z^2)$ 之外，還要求 $\mathrm{E}(Z)$？

所求的不等式必須來自 $\mathrm{Var}(Z)>0$，而方差需要用到這兩個矩（moment）。對數會在每個矩中出現，其一次項會互相抵消，只剩下平方項。

對兩個積分，先做除法：

$$\mathrm{f}(x)=c+\frac{c^2}{x-c},\qquad x\,\mathrm{f}(x)=\frac{cx^2}{x-c}=c\Big(x+c+\frac{c^2}{x-c}\Big).$$

記 $L=\ln\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)$；由於 $b-c>a-c>0$，L 為正。於是

$$\mathrm{E}(Z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\Big(c+\frac{c^2}{x-c}\Big)\mathrm{d}x=c+\frac{c^2L}{b-a}.$$

由第 (i) 部分，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^2)&=-ab+\frac{2c}{b-a}\int_a^b\Big(x+c+\frac{c^2}{x-c}\Big)\mathrm{d}x\\&=-ab+\frac{2c}{b-a}\Big(\frac{b^2-a^2}{2}+c(b-a)+c^2L\Big)\\&=-ab+c(a+b)+2c^2+\frac{2c^3L}{b-a}.\end{aligned}$$

由於 $c(a+b)=ab$，首兩項互相抵消。減去 $\mathrm{E}(Z)^2=c^2+\dfrac{2c^3L}{b-a}+\dfrac{c^4L^2}{(b-a)^2}$ 後，含 L 的一次項抵消，得

$$\mathrm{Var}(Z)=c^2-\frac{c^4L^2}{(b-a)^2}.$$

Z 並非常數：由第 (i) 部分，其分佈函數（distribution function）$\big(b-\mathrm{f}(y)\big)/(b-a)$ 在 $[a,b]$ 上由 0 嚴格遞增至 1。所以 $\mathrm{Var}(Z)>0$，由此得

$$L^2<\frac{(b-a)^2}{c^2}.$$

L 與 $(b-a)/c$ 均為正，所以可以兩邊開平方根：

$$\ln\left(\frac{b-c}{a-c}\right)<\frac{b-a}{c}.$$

驗算

- 在第 (i) 部分，試用最簡單的自反函數例子 $\mathrm{f}(x)=a+b-x$。此時 Y 在 $[a,b]$ 上均勻分佈，而公式給出 $\mathrm{E}(Y^2)=-ab+\frac{2}{b-a}\int_a^b x(a+b-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$，這正是均勻分佈隨機變量的二階矩。

- 取 $a = 1$、$b = 3$，則 $c = \frac{3}{4}$，$L = \ln 9 \approx 2.197$，而 $(b-a)/c = \frac{8}{3} \approx 2.667$。不等式成立，且 $\mathrm{Var}(Z) = \frac{9}{16} - \frac{81}{256} \cdot \frac{(\ln 9)^2}{4} \approx 0.180$。用電腦對 f 和 f^2 作數值積分，得到相同的方差。
- 當 $b \to a$ 時，不等式兩邊都趨於 0，而 $\mathrm{Var}(Z) \to 0$，理應如此：Z 被擠壓在 $[a, b]$ 之內。

常見錯誤

- 忘記遞減函數會把不等式反向，因而寫成 $\mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(X \le \mathrm{f}(y))$。
- 漏掉密度 $-\mathrm{f}'(y)/(b-a)$ 中的負號。密度不可能是負數。
- 沒有說明為何 $\mathrm{Var}(Z)$ 嚴格為正，或者開平方根時沒有指出兩邊均為正。

STEP 之外

第 (i) 部分是密度變換法則的特例：若 $Y = \mathrm{f}(X)$ 且 f 單調（monotonic），則 $g_Y(y) = g_X\big(\mathrm{f}^{-1}(y)\big)\,\big|(\mathrm{f}^{-1})'(y)\big|$。由 $\mathrm{Var}(Z) > 0$ 得出嚴格不等式，是一個強大技巧的例子：$\mathrm{E}(Z)^2 \le \mathrm{E}(Z^2)$ 其實是喬裝了的詹森不等式（Jensen's inequality）（或柯西—施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality)），只要巧妙地選取隨機變量，就能證明許多經典不等式。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率導論》）涵蓋了這兩個概念。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。