詳細解答

STEP III 2020，第 10 題

力學 • 簡諧運動

STEP III 2020，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

質點懸掛於彈簧下時，會繞其平衡位置（equilibrium position）作簡諧運動（simple harmonic motion），由此可用 k、g 和 a 表示 Ω。在平台上時，質點的加速度就是平台的加速度，而平台的加速度可用 x 表示，因此牛頓第二定律（Newton's second law）直接給出反作用力（reaction）。要保持接觸，反作用力必須時刻非負；由於它原來是 x 的線性（linear）函數，我們只需在平台行程的兩端檢查即可，而哪一端是關鍵，則取決於 ω 比 Ω 小還是大。

解答

把質點視為質點模型（point mass），彈簧視為輕彈簧，且無論伸長或壓縮（compression）均遵從胡克定律（Hooke's law）。全文中，作用於質點的力以向上為正。

懸掛的質點。 設 y 為質點在 A 下方的距離，則伸長量（extension）為 $y-a$，張力（tension）為 $kmg(y-a)/a$，向上作用於質點。以向下為正應用牛頓第二定律，得

$$m\ddot{y} = mg - \frac{kmg}{a}(y-a) \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{y} = -\frac{kg}{a}\left(y - a - \frac{a}{k}\right).$$

令 $z = y - a(1+\frac{1}{k})$，上式變為 $\ddot{z} = -\frac{kg}{a}z$，即繞平衡點 $y = a(1+\frac{1}{k})$ 的簡諧運動。質點從靜止釋放時並不在此點（任何不等於 a/k 的伸長量都給出 $z \neq 0$），因此它以角頻率（angular frequency）$\sqrt{kg/a}$ 作豎直振動，週期（period）為 $2\pi\sqrt{a/(kg)}$。令此等於 $2\pi/\Omega$，得 $\Omega^2 = kg/a$，即

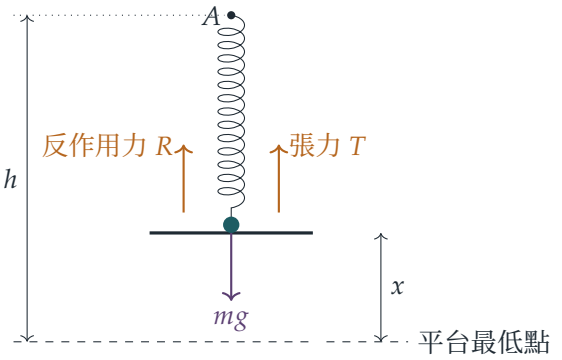
$$kg = a\Omega^2.$$

下文會以 $g/\Omega^2 = a/k$ 的形式使用此式。

平台。 平台作振幅（amplitude）為 b、角頻率為 ω 的簡諧運動，因此它在其最低點上方的高度 x 的範圍為 $0 \le x \le 2b$，中心為 $x = b$。所以其加速度為

$$\ddot{x} = -\omega^2(x-b) = \omega^2(b-x).$$

（例如，$x = b(1-\cos\omega t)$ 給出 $\ddot{x} = \omega^2 b\cos\omega t = \omega^2(b-x)$。）



反作用力。 質點與平台接觸期間隨平台一起運動，所以它在平台最低點上方的高度為 x，加速度為 $\ddot{x}$。它在 A 下方的距離為 $h-x$，因此彈簧的伸長量為 $h-x-a$，張力為

$$T = \frac{kmg}{a}(h-x-a) = m\Omega^2(h-x-a),$$

這裏用了 $kg/a = \Omega^2$。（若 $h-x<a$，彈簧被壓縮，T 為負，即推力（thrust），上式依然成立。）作用於質點的力為向上的 R 和 T 以及向下的 mg，所以

$$R + T - mg = m\ddot{x} = m\omega^2(b-x),$$

因此

$$R = mg - m\Omega^2(h-x-a) + m\omega^2(b-x) = mg + m\Omega^2(a+x-h) + m\omega^2(b-x),$$

此即所求。

保持接觸。 質點始終留在平台上，當且僅當對 $[0,2b]$ 內每一個 x 都有 $R \ge 0$。把含 x 的項歸併，

$$\frac{R}{m} = g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + (\Omega^2 - \omega^2)\,x.$$

? **想一想** 為甚麼只需看 x 的一個值就足夠？

R 是 x 的線性函數，所以在區間 $0 \le x \le 2b$ 上，其最小值出現在其中一端：若斜率 $\Omega^2 - \omega^2$ 為正，則在 $x = 0$；若為負，則在 $x = 2b$。平台在每個週期中都會到達兩端，所以「$R \ge 0$ 時刻成立」等價於「$R \ge 0$ 在相應的一端成立」。

情況 $\omega < \Omega$。最小值在 $x = 0$（運動的最低點），所以需要

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b \geq 0 \iff h \leq a + \frac{g}{\Omega^2} + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2} = a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2},$$

這裏除以 $\Omega^2 > 0$ 並用了 $g/\Omega^2 = a/k$。這就是所求的不等式。

情況 $\omega > \Omega$。此時最小值在 $x = 2b$（運動的最高點），所以需要

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + 2b(\Omega^2 - \omega^2) \geq 0 \iff h \leq a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b\left(2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right).$$

對所有 ω 都成立的界。 假設質點保持接觸。

- 若 $\omega < \Omega$，則 $\omega^2 b/\Omega^2 < b$（因為 $b > 0$），所以 $h \leq a(1+\frac{1}{k}) + \omega^2 b/\Omega^2 < a(1+\frac{1}{k}) + b$。
- 若 $\omega > \Omega$，則 $2 - \omega^2/\Omega^2 < 1$，所以 $h \leq a(1+\frac{1}{k}) + b(2-\omega^2/\Omega^2) < a(1+\frac{1}{k}) + b$。
- 若 $\omega = \Omega$，R 中含 x 的項互相抵消，$R/m = g + \Omega^2(a-h) + \Omega^2 b$ 為常數；$R \geq 0$ 恰好給出 $h \leq a(1+\frac{1}{k}) + b$。

所以無論哪種情況，

$$h \leq a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b$$

都是必要條件，與 ω 的值無關。由於 $h - b$ 是平台運動中心在 A 下方的深度，而 $a(1+\frac{1}{k})$ 是懸掛平衡位置的深度，這個條件的意思是：平台振動的中心點不能低於質點本身的平衡位置。

驗算

- 取 $a = 1$、$k = 2$、$g = 9.8$，以數值方法逐步模擬自由運動，所得週期給出 $a\Omega^2 \approx 19.600$，與 $kg = 19.6$ 吻合。
- 若平台靜止（$b = 0$），兩個界都變成 $h \leq a(1+\frac{1}{k})$：平台不能低於平衡點，否則彈簧會把質點拉離平台。這完全正確。
- 在 $\omega = \Omega$ 時，兩種情況的界一致，都給出 $a(1+\frac{1}{k}) + b$，按連續性（continuity）理應如此。

常見錯誤

- 只檢查運動的最高點。對於緩慢的平台（$\omega < \Omega$），質點最危險的位置是最低點，那裏彈簧向上拉得最用力。

- 忘記彈簧可以被壓縮：張力公式 $kmg(h-x-a)/a$ 無論正負都適用，所以不必另行分情況討論。

STEP 之外

這其實是一個受迫振子（forced oscillator）：彈簧試圖令質點以其固有頻率（natural frequency）Ω 振動，而平台則強加頻率 ω，反作用力正是調和兩者所需的力。大學的振動課程會研究受驅系統、共振（resonance），以及響應如何隨 ω/Ω 變化。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對這些概念有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。