詳細解答

STEP III 2020，第 1 題

純數學 • 歸約公式

> **STEP III 2020，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

第 (i) 部分是一條遞推公式（reduction formula），所以自然的第一步是分部積分法（integration by parts）：對 $\cos x$ 的冪求導，並對 $\cos bx$ 積分。這樣會剩下乘積 $\sin x \sin bx$，而 $\cos(b-1)x$ 的複角公式（compound-angle formula）可以把它變回原本類型的積分。第 (ii) 部分不需要任何新工具：遞推關係（recurrence relation）把 a 和 b 同時減一，使差 $b-a = 2m+1$ 保持不變，因此可以順利地由 n 推進到 $n+1$。

解答

第 (i) 部分

設 $a, b \geq 1$。取 $u = \cos^a x$ 及 $\mathrm{d}v = \cos bx\,\mathrm{d}x$ 進行分部積分，於是 $\mathrm{d}u = -a\cos^{a-1}x \sin x\,\mathrm{d}x$，而 $v = \frac{1}{b}\sin bx$（由於 $b \neq 0$，這樣做沒有問題）：

$$\mathrm{I}(a,b) = \left[\frac{\cos^a x \sin bx}{b}\right]_0^{\pi/2} + \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1} x \sin x \sin bx\,\mathrm{d}x.$$

邊界項在兩端都等於零：在 $x = \frac{\pi}{2}$ 處是因為 $\cos^a \frac{\pi}{2} = 0$（這裏用到 $a \geq 1$），而在 $x = 0$ 處是因為 $\sin 0 = 0$。

> ? **想一想** 怎樣才能把 $\sin x \sin bx$ 變回 x 的倍數的餘弦？

我們希望出現 $\mathrm{I}(a-1, b-1)$，所以考慮 $\cos(b-1)x$：

$$\cos(b-1)x = \cos bx \cos x + \sin bx \sin x \quad \Longrightarrow \quad \sin x \sin bx = \cos(b-1)x - \cos x \cos bx.$$

代入後得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1}x\,\cos(b-1)x\,\mathrm{d}x - \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2}\cos^a x\,\cos bx\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1) - \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a,b).\end{aligned}$$

兩邊乘以 b，再把含 $\mathrm{I}(a,b)$ 的項合併，得 $(a+b)\,\mathrm{I}(a,b) = a\,\mathrm{I}(a-1,b-1)$；由於 $a+b>0$，

$$\mathrm{I}(a,b) = \frac{a}{a+b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1),$$

此即所求。

第 (ii) 部分

左邊的積分是 $\mathrm{I}(n,\,n+2m+1)$。記右邊為

$$R(n,m) = (-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}$$

。固定任意非負整數 m；我們對 n 用數學歸納法 (induction) 證明對所有 $n\ge 0$，$\mathrm{I}(n,n+2m+1) = R(n,m)$。

基本情況， $n=0$。

$$\mathrm{I}(0,2m+1) = \int_0^{\pi/2}\cos(2m+1)x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin((2m+1)\frac{\pi}{2})}{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2m+1},$$

因為 $\sin(m\pi+\frac{\pi}{2}) = \cos m\pi = (-1)^m$。另一方面，

$$R(0,m) = (-1)^m\,\frac{1\cdot 1\cdot(2m)!\,m!}{m!\,(2m+1)!} = \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

所以結果在 $n=0$ 時成立。

歸納步驟。假設對某個 $k\ge 0$，$\mathrm{I}(k,k+2m+1) = R(k,m)$。在第 (i) 部分中取 $a=k+1$ 及 $b=k+2m+2$，兩者都是正整數，於是 $a-1=k$、$b-1=k+2m+1$ 而 $a+b = 2k+2m+3$：

$$\mathrm{I}(k+1,\,k+2m+2) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,\mathrm{I}(k,\,k+2m+1) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m).$$

留意 $k+2m+2 = (k+1)+2m+1$，所以左邊正正是 $n=k+1$ 且 m 不變時的積分。

> ? **想一想** 按公式，$R(k+1,m)/R(k,m)$ 應該等於甚麼？

在 R 中由 $n=k$ 變到 $n=k+1$ 時，因子 $(-1)^m(2m)!/m!$ 不變，而

$$\begin{aligned}\frac{R(k+1,m)}{R(k,m)} &= \frac{2^{k+1}}{2^k}\cdot\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{(k+m+1)!}{(k+m)!}\cdot\frac{(2k+2m+1)!}{(2k+2m+3)!}\\ &= \frac{2(k+1)(k+m+1)}{(2k+2m+3)(2k+2m+2)} = \frac{k+1}{2k+2m+3},\end{aligned}$$

這裏用到 $2k+2m+2=2(k+m+1)$。因此

$$\mathrm{I}(k+1,\,k+2m+2)=\frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m)=R(k+1,m),$$

這就是 $n=k+1$ 時的命題。

由於結果在 $n=0$ 時成立，而且它在 $n=k$ 時成立可推出它在 $n=k+1$ 時成立，根據數學歸納法，它對所有非負整數 n 都成立。由於 m 是任意的，它對所有非負整數 m 也成立：

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\cos(n+2m+1)x\,\mathrm{d}x=(-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}.$$

驗算

- 取 $n=1$、$m=0$：公式給出 $\frac{2\cdot1\cdot1\cdot1}{1\cdot3!}=\frac{1}{3}$。直接計算，$\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的積分是 $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{1}{3}$。
- 取 $n=1$、$m=1$：公式給出 $-\frac{2\cdot2\cdot2}{5!}=-\frac{1}{15}$，而以數值方法計算 $\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 5x\,\mathrm{d}x$ 得 -0.066667。
- 第 (i) 部分的遞推關係和第 (ii) 部分的閉合形式，亦已用電腦就所有 $n\le 6$、$m\le 5$ 驗證過。

常見錯誤

- 忘記說明邊界項為何等於零；上限處需要 $a\ge 1$。
- 對 n 進行歸納，卻讓 m 跟着改變：第 (i) 部分把 a 和 b 一同減一，所以 m 保持不變。
- 在 $\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)$ 中弄錯正負號；它依次為 $1,-1,1,\ldots$，因而給出 $(-1)^m$。

STEP 之外

這類遞推公式是遞推關係在積分上的對應，而閉合形式由階乘（factorial）的比構成，方式與沃利斯乘積（Wallis's product）及 Beta 函數（Beta function）$\int_0^{\pi/2}\cos^p x\sin^q x\,\mathrm{d}x$ 相同；這些內容在大學分析或數學方法課程的早期便會遇到。如想做更多同類題目，可參閱 Siklos，*Advanced Problems in Mathematics*（《數學進階題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。