詳細解答

STEP II 2020，第 9 題

力學 • 相撞的拋體

STEP II 2020，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

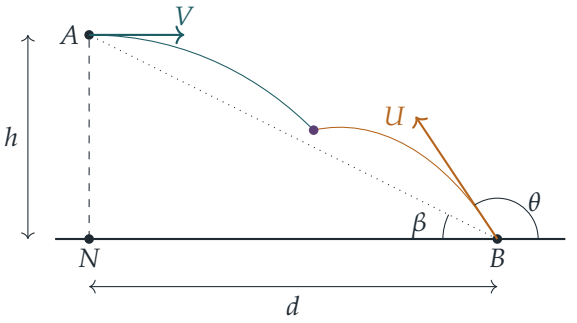
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

把兩粒質點放進同一個坐標系（coordinate system），寫出各自在時刻 t 的位置。兩者都受相同的向下加速度（acceleration）g，所以比較高度時，$-\frac{1}{2}gt^2$ 項會互相抵消：相對於對方而言，兩粒質點都以恆定速度沿直線運動。這令碰撞時間變得非常簡單，而之後每一部分都只是它的簡短推論。

解答

把兩粒質點都模型化為只受重力作用、自由運動的質點（point mass），不計空氣阻力（air resistance）。取 N 為原點，x 軸沿 NB（故 $B=(d,0)$，$A=(0,h)$），y 軸鉛垂向上。從 A 出發的質點向 B 運動，從 B 出發的質點向 N 運動，所以兩者的水平速度方向相反；這正是題目所給結果所描述的設定。



拋出後時刻 t，從 A 出發的質點位於

$$x_A = Vt, \qquad y_A = h - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

而從 B 出發的質點位於

$$x_B = d - Ut\cos\theta, \qquad y_B = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

若兩個坐標同時相等，它們便在時刻 T 碰撞（collision）。高度相等當且僅當

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 = UT\sin\theta - \tfrac{1}{2}gT^2 \quad\Longrightarrow\quad T = \frac{h}{U\sin\theta},$$

這是唯一可能的碰撞時間（由於 θ 是銳角，$\sin\theta > 0$）。在同一時刻，水平位置也必須相等：

$$VT = d - UT\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad (V + U\cos\theta)\,\frac{h}{U\sin\theta} = d.$$

兩邊乘以 $U\sin\theta$，得 $Vh + Uh\cos\theta = Ud\sin\theta$，再除以 U，

$$d\sin\theta - h\cos\theta = \frac{Vh}{U},$$

此即所求。

第 (i) 部分

由直角三角形 ANB 得 $\tan\beta = h/d$，且 $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$。由於 V、h、U 都是正數，剛證得的結果給出 $d\sin\theta - h\cos\theta > 0$。除以 $d\cos\theta > 0$（因 θ 是銳角），

$$\tan\theta > \frac{h}{d} = \tan\beta.$$

兩個角都落在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 內，而 tan 在此區間上嚴格遞增，所以 $\theta > \beta$。

第 (ii) 部分

> ? **想一想** 到目前為止的代數推導完全沒有用到地面。我們還有甚麼物理條件未加上？

碰撞必須在任何一粒質點到達地面之前發生，所以時刻 T 的共同高度必須至少為 0：

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad h \geq \frac{gh^2}{2U^2\sin^2\theta} \quad\Longleftrightarrow\quad U^2\sin^2\theta \geq \frac{gh}{2}.$$

（我們除以了 $h > 0$，並乘以了 $U^2\sin^2\theta > 0$。）由於 $U\sin\theta > 0$，取正平方根得

$$U\sin\theta \geq \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

等號對應兩粒質點恰好在到達地面時相遇的情況。

第 (iii) 部分

記 $r = AB = \sqrt{d^2 + h^2}$，於是 $d = r\cos\beta$，$h = r\sin\beta$。那麼

$$d\sin\theta - h\cos\theta = r(\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta) = r\sin(\theta - \beta),$$

而碰撞條件變成

$$r\sin(\theta-\beta) = \frac{Vr\sin\beta}{U} \quad\Longrightarrow\quad \frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}.$$

由第 (i) 部分，$\theta - \beta > 0$；此外 $\theta - \beta < \theta < \frac{1}{2}\pi$。所以 $0 < \sin(\theta-\beta) < 1$，又因 $\sin\beta > 0$，

$$\frac{U}{V} = \frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)} > \sin\beta.$$

最後部分

碰撞點的高度是 $h - \frac{1}{2}gT^2$，所以

$$\text{碰撞點高於}\tfrac{1}{2}h \iff h - \tfrac{1}{2}gT^2 > \tfrac{1}{2}h \iff gT^2 < h.$$

從 B 出發的質點的鉛垂速度是 $U\sin\theta - gt$，所以

$$\text{它正在上升，於時刻}T \iff U\sin\theta - gT > 0 \iff gT < U\sin\theta.$$

想一想 怎樣才能把 $gT < U\sin\theta$ 與 $gT^2 < h$ 作比較？

利用碰撞時間本身：$T = h/(U\sin\theta)$ 表示 $U\sin\theta = h/T$。於是乘以 $T > 0$，

$$gT < U\sin\theta \iff gT < \frac{h}{T} \iff gT^2 < h.$$

兩個條件都等價於 $gT^2 < h$，所以兩粒質點在高於 $\frac{1}{2}h$ 處碰撞，當且僅當從 B 出發的質點在碰撞時仍在向上運動。

驗算

- 取 $g = 9.8$，$h = 10$，$d = 20$，$U = 20$，$\theta = \frac{1}{4}\pi$。碰撞條件給出 $V = U(d\sin\theta - h\cos\theta)/h = 10\sqrt{2} \approx 14.14$，以及 $T = 1/\sqrt{2} \approx 0.707\,\text{s}$。此時兩粒質點都位於 $x = 10$，$y = 10 - 4.9\times\frac{1}{2} = 7.55$，高於 $\frac{1}{2}h = 5$；從 B 出發的質點的鉛垂速度為 $10\sqrt{2} - 9.8/\sqrt{2} \approx 7.21 > 0$，正在上升，與最後部分的預測一致。此外 $U/V = \sqrt{2} > \sin\beta = 1/\sqrt{5}$。

- 無重力的直覺：當 $g = 0$ 時，兩粒質點沿直線運動，而條件 $U/V = \sin\beta/\sin(\theta - \beta)$ 正是由 A、B 和相遇點組成的三角形中的正弦定理（sine rule）。重力令兩粒質點向下移動相同的距離，所以條件不變。
- 以電腦對數以千計隨機選取的 h、d、U、θ 作驗算，確認了碰撞、全部三條不等式，以及最後部分的等價關係。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分忘記地面：該不等式來自碰撞發生的高度至少為零，而不是來自碰撞方程本身的任何東西。
- 由 $\tan\theta > \tan\beta$ 推出 $\theta > \beta$，卻沒有說明兩個角都是銳角，而 tan 在該範圍內遞增。
- 在第 (iii) 部分只寫到 $\sin(\theta - \beta) \leq 1$ 便停下；嚴格不等式需要 $\theta - \beta < \frac{1}{2}\pi$。

STEP 之外

$-\frac{1}{2}gt^2$ 項的抵消，是轉換到自由下落參考系（frame of reference）的一個例子：在一個以 g 加速的參考系中，重力消失，兩粒質點都沿直線運動。這是伽利略（Galileo）變換和加速參考系等概念最簡單的情形，這些概念正是大學第一門力學課程的開端，日後亦是愛因斯坦（Einstein）等效原理（equivalence principle）的出發點。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力學導論》）對非慣性參考系（non-inertial frame）有細緻的討論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。