詳細解答

STEP II 2020，第 8 題

純數學 • 多項式與積分

STEP II 2020，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

由於 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$，f 的每個根都是 F 的轉向點（turning point），而每個面積條件都變成關於 F 在其中一個轉向點的值的陳述。一旦知道 F 在 0 和 c 有二重根（double root），和式 $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(c-x)$ 便化簡為只有一個決定正負號的因子 $c - 2h$。把這個正負號與我們對 F 在 $[0, c]$ 上的最大值和最小值的認識作比較，便迫使圖像具有對稱性。

解答

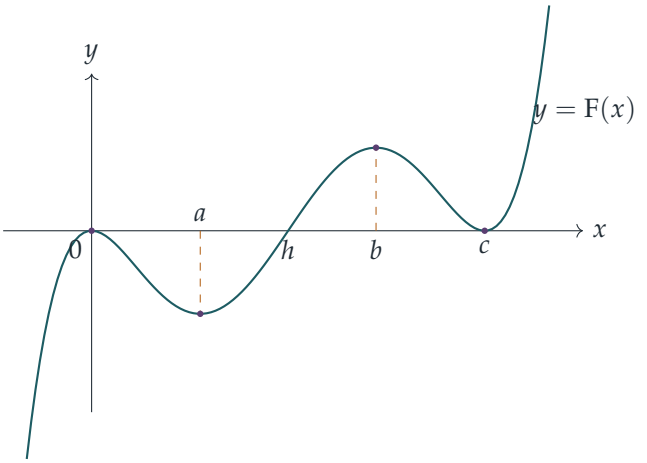
由於 f 是首一（monic）多項式，其根為 $0, a, b, c$，故 $\mathrm{f}(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$。因此在 $(0, a)$ 上 $\mathrm{f} < 0$，在 (a, b) 上 $\mathrm{f} > 0$，在 (b, c) 上 $\mathrm{f} < 0$，而當 $x < 0$ 及 $x > c$ 時 $\mathrm{f} > 0$。設 A 為 0 與 a 之間的面積。題設條件指出 b 與 c 之間的面積為 A，a 與 b 之間的面積為 $2A$，其中 $A > 0$。

第 (i) 部分

由於 $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$，在 $\mathrm{f} < 0$ 的區間上的積分等於該處面積的相反數。因此

$$\mathrm{F}(0) = 0, \qquad \mathrm{F}(a) = -A, \qquad \mathrm{F}(b) = -A + 2A = A, \qquad \mathrm{F}(c) = A - A = 0.$$

由於 $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$，F 的轉向點位於 $x = 0, a, b, c$。f 的正負號在 0 和 b 由 $+$ 變為 $-$，所以該處為極大點；在 a 和 c 由 $-$ 變為 $+$，所以該處為極小點。F 是五次多項式，其首項係數（leading coefficient）$\frac{1}{5}$ 為正，故當 $x \to \pm\infty$ 時 $\mathrm{F}(x) \to \pm\infty$。



曲線在 $(0,0)$ 有極大點，在 $x=a$ 有極小點且 $y=-A$，在 $x=b$ 有極大點且 $y=A$，並在 $(c,0)$ 有一個與 x 軸相切的極小點。

F 的形式。F 是首項係數為 $\frac{1}{5}$ 的 5 次多項式。在 $x=0$，有 $\mathrm{F}(0)=0$ 及 $\mathrm{F}'(0)=\mathrm{f}(0)=0$，所以 $x=0$ 是重數（multiplicity）至少為 2 的根。同理 $\mathrm{F}(c)=0=\mathrm{F}'(c)$，所以 c 是重數至少為 2 的根。這樣便確定了五個一次因子中的四個：

$$\mathrm{F}(x)=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(x-h)$$

其中 h 為某實數。此外，$\mathrm{F}(a)=-A<0<A=\mathrm{F}(b)$，所以 F 在 a 與 b 之間（不含端點）有一個根。0 和 c 都不在 (a,b) 之內，所以這個根必定是 h。因此 $a<h<b$，特別地 $0<h<c$。

和式。注意 $(c-x)^2((c-x)-c)^2=x^2(x-c)^2$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x)+\mathrm{F}(c-x)&=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2[(x-h)+(c-x-h)]\\&=\tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(c-2h).\end{aligned}$$

第 (ii) 部分

在 $[0,c]$ 上，F 在 $[0,a]$ 上嚴格遞減，在 $[a,b]$ 上嚴格遞增，在 $[b,c]$ 上嚴格遞減。所以在 $[0,c]$ 上的最小值是 $\mathrm{F}(a)=-A$：唯一的其他候選值是端點值 $\mathrm{F}(c)=0>-A$。這個最小值只在 $x=a$ 取得。所以當 $0\le x\le c$ 時，

$$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(x)\ \ge\ \mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(a)=A-A=0,$$

而當 $x\neq a$ 時不等式嚴格成立。

想一想 取哪個 x 值，可以使 $\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(x)$ 看起來像第 (i) 部分的和式？

取 $x=c-b$，由於 $0<b<c$，它位於 $[0,c]$ 之內。由第 (i) 部分，

$$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b)=\tfrac{1}{5}b^2(b-c)^2(c-2h).$$

若 $c-b\neq a$，左方嚴格為正。由於 $\frac{1}{5}b^2(b-c)^2>0$，可推出 $c-2h>0$。所以 $c-b=a$ 或 $c>2h$，此即所求。

現在把同一論證倒過來用。在 $[0,c]$ 上，F 的最大值是 $\mathrm{F}(b)=A$，大於端點值 $\mathrm{F}(0)=\mathrm{F}(c)=0$，而且只在 $x=b$ 取得。所以當 $0\leq x\leq c$ 時，

$$\mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(x)\leq \mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(b)=0,$$

而當 $x\neq b$ 時不等式嚴格成立。取 $x=c-a\in[0,c]$，得 $\frac{1}{5}a^2(c-a)^2(c-2h)\leq 0$，若 $c-a\neq b$ 則嚴格成立。所以 $c-a=b$ 或 $c<2h$。

若 $c\neq a+b$，兩個結論分別給出 $c>2h$ 和 $c<2h$，這是不可能的。因此 $c=a+b$。於是 $c-b=a$，所以

$$0=\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b)=\tfrac{1}{5}b^2a^2(c-2h).$$

由於 $a,b\neq 0$，得 $c=2h$。

第 (iii) 部分

當 $h=\frac{1}{2}c$ 時，有 $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{5}u\,(x-\frac{1}{2}c)$，其中 $u=x^2(x-c)^2$，因此 $u'=2x(x-c)(2x-c)$。用乘積法則（product rule）求導，

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)=\mathrm{F}'(x)&=\tfrac{1}{5}\left[2x(x-c)(2x-c)(x-\tfrac{1}{2}c)+x^2(x-c)^2\right]\\&=\tfrac{1}{5}x(x-c)[(2x-c)^2+x(x-c)]\\&=\tfrac{1}{5}x(x-c)(5x^2-5cx+c^2)\\&=x(x-c)(x^2-cx+\tfrac{1}{5}c^2).\end{aligned}$$

（所以 $a,b=\frac{1}{2}c\mp\frac{c}{2\sqrt{5}}$，兩者之和確實是 c。）

想一想 各根關於 $x=\frac{1}{2}c$ 對稱。能否利用這一點令二階導數（second derivative）變得容易計算？

可以。設 $y=x-\frac{1}{2}c$。則 $x(x-c)=y^2-\frac{1}{4}c^2$ 及 $x^2-cx+\frac{1}{5}c^2=y^2-\frac{1}{20}c^2$，所以

$$\mathrm{f}=(y^2-\tfrac{1}{4}c^2)(y^2-\tfrac{1}{20}c^2)=y^4-\tfrac{3}{10}c^2y^2+\tfrac{1}{80}c^4.$$

由於 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1$，

$$\mathrm{f}''(x) = 12y^2 - \tfrac{3}{5}c^2,$$

它恰好在 $y^2 = \frac{1}{20}c^2$ 時為零。在這些點，f 的因子 $y^2 - \frac{1}{20}c^2$ 等於零，所以 $\mathrm{f} = 0$。每一點都是 f″（作為 y 的二次式）的單根（simple root），所以 f″ 在該處變號，它們確實是拐點（point of inflection）。所以兩個拐點都位於 x 軸上。事實上，它們就是點 $(a, 0)$ 和 $(b, 0)$。

驗算

- 取 $c = 2$，則 $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.5528$ 及 $b \approx 1.4472$。對 f 作數值積分，得 $[0, a]$、$[a, b]$ 和 $[b, c]$ 上的面積分別為 0.05724、0.11449 和 0.05724：外側兩個相等，而且各是中間那個的一半。
- 以 $a + b = c$ 及 $ab = \frac{1}{5}c^2$ 展開 $x(x-a)(x-b)(x-c)$，可重新得到第 (iii) 部分的式子。
- 取 $c = 2$，用有限差分（finite difference）估計 f″ 在 $x = a \approx 0.5528$ 的值，在捨入誤差範圍內為零，而且它在 $x = 0.54$ 與 $x = 0.56$ 之間變號。

常見錯誤

- 只記得 $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(c) = 0$，忘記同時有 $\mathrm{F}'(0) = \mathrm{F}'(c) = 0$，因而遺漏了二重根。
- 沒有證明 $0 < h < c$：決定 h 位置的，正是 F 在 a 與 b 之間的變號。
- 在第 (ii) 部分只用了第一個不等式。它只給出「$c = a + b$ 或 $c > 2h$」，單靠這一點並不足夠。還需要用 $\mathrm{F}(a)$ 得出的反向不等式，才能完成論證。

STEP 之外

第 (ii) 部分的論證用到極值定理（extreme value theorem）：閉區間上的連續函數必定取得最大值和最小值，而在這裡我們還確切知道它們在哪裡取得。面積條件迫使這個四次多項式關於 $x = \frac{1}{2}c$ 對稱，這說明了積分條件可以如何確定一個多項式的形狀。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）仔細論述了極值定理，以及聯繫 F 與 f 的微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。