詳細解答

STEP II 2020，第 7 題

純數學 • 複數變換

> **STEP II 2020，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

映射 $z \mapsto w = \dfrac{2}{z-2}$ 是先平移、再作反演（inversion），而反演會把不經過原點的直線映成經過原點的圓。要證明 w 位於某個特定的圓上，最乾淨利落的做法是先猜出圓心 c，再證明 $|w-c|$ 可化簡為常數。把 $w-c$ 寫成單一分式後，會發現分子與分母互為共軛（conjugate）（或幾乎如此），正因如此，模（modulus）才是常數。

解答

以下全程使用 $|\alpha/\beta| = |\alpha|/|\beta|$，以及對實數 x、y 有 $|x+yi| = |x-yi| = |y+xi| = \sqrt{x^2+y^2}$。

第 (i) 部分

設 $z = 3+ti$，則 $z-2 = 1+ti$，所以

$$w - 1 = \frac{2}{1+ti} - 1 = \frac{2-(1+ti)}{1+ti} = \frac{1-ti}{1+ti}.$$

分子與分母互為共軛複數，因此模相同，都是 $\sqrt{1+t^2}$，而且永不為零。故此

$$|w-1| = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1,$$

與 t 無關。直線 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 上每一個 z 都可寫成 $3+ti$（t 為某實數），所以對每個這樣的 z，點 w 與 1 的距離都是 1：它位於圓心為 1、半徑為 1 的圓上。

直線 V。現在 $z = p+ti$，不妨記 $a = p-2$；由於 $p \neq 2$，a 是非零實數。於是 $z-2 = a+ti$，永不為零。當 $p = 3$ 時圓心是 $1 = 1/a$，所以一般情況下我們嘗試以 $1/a$ 為圓

心：

$$w - \frac{1}{a} = \frac{2}{a+ti} - \frac{1}{a} = \frac{2a-(a+ti)}{a(a+ti)} = \frac{a-ti}{a(a+ti)}.$$

同樣地 $|a-ti| = |a+ti|$，所以

$$\left|w - \frac{1}{p-2}\right| = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|p-2|}.$$

因此 w 位於以下的圓上：

$$\text{圓心}\frac{1}{p-2}, \qquad \text{半徑}\frac{1}{|p-2|}.$$

半徑中的絕對值符號不可省略：若 $p < 2$，圓心位於負實軸上，但半徑必須是正數。

想一想 如果題目沒有先給出 $p = 3$ 的情況，我們會怎樣找出圓心 $1/(p-2)$？

點 $z = p$（即 $t = 0$）給出 $w = 2/a$；而當 $t \to \pm\infty$ 時，$w \to 0$。這兩點是一條直徑的兩端（圓關於實軸對稱，而它們正是圓上僅有的兩個實數點），所以圓心是它們的中點 $1/a$。

至於虛部，把分子分母同乘以共軛：

$$w = \frac{2(a-ti)}{a^2+t^2}, \qquad \text{所以} \qquad \operatorname{Im}(w) = \frac{-2t}{a^2+t^2}.$$

分母為正，所以 $\operatorname{Im}(w) > 0$ 當且僅當 $t < 0$。因此 V 上使 $\operatorname{Im}(w) > 0$ 的點是

$$z = p + ti\text{，其中}t < 0, \quad \text{即}V\text{ 上位於實軸下方的點}(\operatorname{Im}(z) < 0).$$

第 (ii) 部分

現在 $z = s + qi$，其中 s 為實數。記 $u = s - 2$，則 $z - 2 = u + qi$；由於 $q \neq 0$，它不為零。這裏圓的「兩端」是 $w = 0$（當 $u \to \pm\infty$）及 $w = 2/(qi) = -2i/q$（當 $u = 0$），由此推測圓心為 $-i/q$。驗證：

$$w + \frac{i}{q} = \frac{2}{u+qi} + \frac{i}{q} = \frac{2q+i(u+qi)}{q(u+qi)} = \frac{q+ui}{q(u+qi)}.$$

而 $|q+ui| = \sqrt{q^2+u^2} = |u+qi|$，所以

$$\left|w + \frac{i}{q}\right| = \frac{1}{|q|}.$$

因此 w 位於以下的圓上：

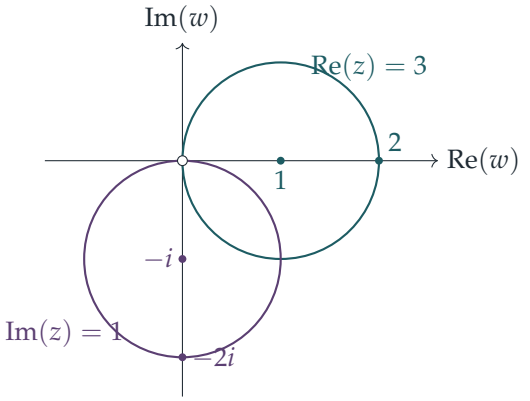
$$\text{圓心} -\frac{i}{q}, \qquad \text{半徑}\frac{1}{|q|}.$$

至於實部，

$$w = \frac{2(u-qi)}{u^2+q^2}, \qquad \text{所以} \qquad \operatorname{Re}(w) = \frac{2u}{u^2+q^2},$$

分母為正。所以 $\mathrm{Re}(w) > 0$ 當且僅當 $u > 0$，即

$$z = s + qi\text{，其中}s > 2, \quad \text{即}H \text{ 中位於下述直線右方的點：} \mathrm{Re}(z) = 2.$$



上圖顯示 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 的像（來自第 (i) 部分）及 $\mathrm{Im}(z) = 1$ 的像（第 (ii) 部分取 $q = 1$）。兩個圓都經過原點，但 $w = 0$ 本身永遠取不到，因為 $2/(z-2) \neq 0$；它對應於沿直線走到「無窮遠處」的 z。

驗算

- 在 V 的公式中取 $p = 3$：圓心 $1/(3-2) = 1$，半徑 1，與第一個結果吻合。
- 代入數值：$z = 3 - i$ 給出 $w = 2/(1-i) = 1 + i$，有 $|w - 1| = 1$ 及 $\mathrm{Im}(w) = 1 > 0$，與 $t = -1 < 0$ 一致。對於 $q = 1$ 的 H，$z = 3 + i$ 給出 $w = 1 - i$，它與 $-i$ 的距離為 1，且實部為正，與 $3 > 2$ 相符。
- 當 $p \to 2$ 時，半徑 $1/|p-2|$ 變大：此時直線 V 非常接近被映到無窮遠的點 $z = 2$，所以它的像理應很大。用電腦對數以千計的隨機 p、q 及每條直線上的點作檢查，證實了兩個圓及兩個符號條件均正確。

常見錯誤

- 把半徑寫成 $1/(p-2)$ 或 $1/q$，而當 $p < 2$ 或 $q < 0$ 時它們是負數。
- 把 $\mathrm{Im}(w)$ 的符號弄反：除以 $z - 2$ 相當於關於實軸作反射，所以 $\mathrm{Im}(w)$ 與 $\mathrm{Im}(z)$ 的符號相反。

STEP 之外

映射 $z \mapsto 2/(z-2)$ 是一個默比烏斯變換（Möbius transformation），即形如 $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ 的映射。這類映射總是把「廣義圓」（generalised circles，即圓和直線）映成廣義圓；從共形映射（conformal mapping）到雙曲幾何（hyperbolic geometry），它們都是複分析（complex analysis）入門課程中最基本的幾何工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直觀複分析》）有一章精彩地介紹它們，書中的圖像令類似本題的結果一目了然。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。