詳細解答

STEP II 2020，第 6 題

純數學 • 矩陣的冪與跡

STEP II 2020，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

本題在 *Beyond STEP* 第 7.4 節回到起點的矩陣中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/finite-order.html

關鍵思路

每個實 2×2 矩陣（matrix）都滿足它自己的特徵方程（characteristic equation）：

$$\mathbf{M}^2 - t\,\mathbf{M} + \delta\,\mathbf{I} = \mathbf{0}, \qquad t = \operatorname{tr}(\mathbf{M}),\ \delta = \det(\mathbf{M}),$$

這就是凱萊–哈密頓定理（Cayley–Hamilton theorem）（把乘積展開，兩行便可驗證）。一旦把 $\mathbf{M}^2$ 寫成 $\mathbf{M}$ 與 $\mathbf{I}$ 的組合，任何像 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ 這樣的方程都會變成「$t\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{I}$ 的倍數」，這就迫使 $t = 0$，或者 $\mathbf{M}$ 本身是 $\mathbf{I}$ 的倍數。之後，第 (iii) 及 (iv) 部分只需把第 (ii) 部分應用到 $\mathbf{M}^2$ 和 $\mathbf{M}^4$（而非 $\mathbf{M}$）上便可得出。

全文記 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$t = a + d$ 及 $\delta = ad - bc$。

解答

第 (i) 部分

把乘積展開，

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因為例如 $(a+d)a-(ad-bc)=a^2+bc$ 及 $(a+d)b=ab+bd$。所以

$$\mathbf{M}^2=t\mathbf{M}-\delta\mathbf{I}. \tag{$*$}$$

對 $(*)$ 取跡（trace），並利用 $\operatorname{tr}(\mathbf{I})=2$，得

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2)=t\cdot t-2\delta=\operatorname{tr}(\mathbf{M})^2-2\det(\mathbf{M}),$$

這正是所求。（直接計算亦可：$a^2+2bc+d^2=(a+d)^2-2(ad-bc)$。）

第 (ii) 部分

第一個等價（equivalence），$(\Rightarrow)$。設 $\mathbf{M}^2=\mathbf{I}$ 且 $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$。代入 $(*)$ 得

$$t\,\mathbf{M}=(1+\delta)\,\mathbf{I}.$$

若 $t\neq 0$，便可兩邊除以 t，得 $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$，其中 $k=(1+\delta)/t$ 為實數；於是 $\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=\mathbf{I}$ 給出 $k=\pm1$，即 $\mathbf{M}=\pm\mathbf{I}$，但這已被排除。因此 $t=0$，從而 $(1+\delta)\mathbf{I}=\mathbf{0}$，所以 $\delta=-1$。

$(\Leftarrow)$。若 $t=0$ 且 $\delta=-1$，則 $(*)$ 給出 $\mathbf{M}^2=0\cdot\mathbf{M}+\mathbf{I}=\mathbf{I}$。此外 $\operatorname{tr}(\pm\mathbf{I})=\pm2\neq0$，所以 $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$。

第二個等價，$(\Rightarrow)$。若 $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$，則 $(*)$ 給出 $t\mathbf{M}=(\delta-1)\mathbf{I}$。若 $t\neq0$，則 $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$，其中 k 為實數，而 $\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=-\mathbf{I}$ 便需要 $k^2=-1$，這對實數 k 是不可能的。所以 $t=0$，從而 $\delta=1$。

$(\Leftarrow)$。若 $t=0$ 且 $\delta=1$，則 $(*)$ 立即給出 $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$。

? **想一想** 我們究竟在哪裏用到 $\mathbf{M}$ 是實矩陣這一點？

只在第二個等價中用到：$k^2=-1$ 沒有實數解。對於複矩陣，$\mathbf{M}=\mathrm{i}\mathbf{I}$ 滿足 $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$，但其跡為 $2\mathrm{i}\neq0$，所以結論便不成立。

第 (iii) 部分

$(\Leftarrow)$ 是顯然的：若 $\mathbf{M}^2=\pm\mathbf{I}$，則 $\mathbf{M}^4=(\pm\mathbf{I})^2=\mathbf{I}$。

$(\Rightarrow)$。設 $\mathbf{N}=\mathbf{M}^2$，這是一個實 2×2 矩陣，且 $\mathbf{N}^2=\mathbf{I}$。要麼 $\mathbf{N}=\pm\mathbf{I}$，這正是我們想要的；要麼 $\mathbf{N}\neq\pm\mathbf{I}$，此時第 (ii) 部分告訴我們 $\det(\mathbf{N})=-1$。但

$$\det(\mathbf{N})=\det(\mathbf{M})^2\geq0,$$

所以第二種情況不可能出現。因此 $\mathbf{M}^2=\pm\mathbf{I}$。

$\mathbf{M}^4=-\mathbf{I}$ 的條件。同樣設 $\mathbf{N}=\mathbf{M}^2$。把第 (ii) 部分的第二個等價應用到 $\mathbf{N}$ 上，

$$\mathbf{M}^4=-\mathbf{I}\iff\operatorname{tr}(\mathbf{N})=0\text{ 且 }\det(\mathbf{N})=1.$$

利用第 (i) 部分及 $\det(\mathbf{N}) = \delta^2$，這等於說

$$t^2 - 2\delta = 0 \quad 及 \quad \delta^2 = 1.$$

由 $\delta^2 = 1$ 得 $\delta = \pm 1$，而 $t^2 = 2\delta \geq 0$ 排除了 $\delta = -1$。所以 $\delta = 1$ 且 $t^2 = 2$。每一步都是等價的，因此

$$\boxed{\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \det(\mathbf{M}) = 1 \text{ 且 } \operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}}.$$

第 (iv) 部分

把第 (iii) 部分應用到 $\mathbf{M}^2$ 上：$\mathbf{M}^8 = \mathbf{I} \iff \mathbf{M}^4 = \pm\mathbf{I}$，所以滿足 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ 的矩陣恰好是滿足以下條件的矩陣：

$$\mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I} \qquad 或 \qquad \det(\mathbf{M}) = 1,\ \operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}.$$

旋轉（rotation）和反射（reflection）就是正交（orthogonal）矩陣：它們的列是互相垂直的單位向量（unit vector）（旋轉的行列式（determinant）為 1，反射的行列式為 -1）。所以我們只需在上述矩陣中找一個列不是單位向量的矩陣。例如

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

的跡為 0、行列式為 -1，所以由第 (ii) 部分得 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$（驗證：$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$），因而 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$。它的第二列 $(1, -1)$ 的長度為 $\sqrt{2} \neq 1$，所以它既不是旋轉，也不是反射。（它是一個「斜反射」：它保持沿 x 軸的每個向量不變，並把沿 $(1, -2)$ 方向的每個向量反向，而這兩個方向並不互相垂直。）

較有趣的那一類中的一個例子是 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$：行列式為 1、跡為 $\sqrt{2}$，所以 $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ 及 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$，但它的第一列長度為 $\sqrt{3}$。它是一個「變形了的」45° 旋轉：它的階（order）恰好是 8，與該旋轉相同，但不保持長度。

驗算

- 轉角為 45° 的旋轉 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的行列式為 1、跡為 $\sqrt{2}$，而轉四次 45° 便是轉半圈，即 $-\mathbf{I}$：與第 (iii) 部分一致。
- 把 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 平方，得 $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$，其跡為 0、行列式為 1，所以由第 (ii) 部分，它的平方是 $-\mathbf{I}$。

- 以電腦搜尋所有元素屬於 $\{-3, -\frac{5}{2}, \ldots, 3\}$ 的矩陣，確切驗證了第 (ii) 部分的兩個等價，以及第 (iii) 部分的第一個等價。

常見錯誤

- 未先處理 $t = 0$ 的情況便除以 t；第 (ii) 部分的整個論證，正是按 t 是否為零來分情況討論。
- 在第 (iii) 部分，忘記 $\det(\mathbf{M}^2) = \det(\mathbf{M})^2$ 不可能是負數；正是這一點排除了 $\mathbf{I}$ 的「其他」平方根（square root）。
- 在第 (iv) 部分以 45° 旋轉作為例子：它雖然滿足 $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$，卻正正是題目所排除的情況。

STEP 之外

恆等式 $(*)$ 是凱萊–哈密頓定理在 2×2 情況下的特例：每個方陣都滿足它的特徵多項式（characteristic polynomial）。像「哪些 $\mathbf{M}$ 滿足 $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$？」這類問題，實質上是關於特徵值（eigenvalue）的問題：在這裏，特徵值必須是八次單位根（roots of unity），而一個階為 8 的實矩陣與某個旋轉相似（similar），但本身不一定是旋轉。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《線性代數導論》）正是本着這種精神，闡述特徵值、相似及特徵多項式。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。