詳細解答

STEP II 2020，第 5 題

純數學 • 數字和與整除性

STEP II 2020，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

10 的每一個冪除以 9 的餘數(remainder)都是 1，所以一個數與它的數字和(digit sum)在模（modulo）9 下必定相同。單憑這一點，每條方程都能化成一個很強的整除（divisibility）條件。接著用大小估計收尾：數字和只以約 $9n$ 的速度增長，而數本身則以約 10^{n-1} 的速度增長，因此只剩下寥寥幾個候選數需要檢驗。

解答

第 (i) 部分

設 $x = \sum_{r=0}^{n-1} a_r 10^r$ 及 $\mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r$，則

$$x - \mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r \left(10^r - 1\right).$$

每一項都有 $a_r \geq 0$ 及 $10^r - 1 \geq 0$，所以總和非負。此外，$10^r - 1 = 99\ldots9$（r 個 9）$= 9 \times 11\ldots1$，可被 9 整除（當 $r = 0$ 時它等於 0）。所以每一項都可被 9 整除，因此 $x - \mathrm{d}(x)$ 亦可被 9 整除。 ■

用同餘（congruence）的語言來說：對每個正整數 x，都有 $x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$。下文會反覆用到這個結果。

第 (ii) 部分

等價關係。由於 $\mathrm{d}(x) \equiv x \pmod 9$，

$$x - 44\,\mathrm{d}(x) \equiv x - 44x = -43x \equiv 2x \pmod 9,$$

因為 $-43 = -45 + 2$。所以 $x - 44\,\mathrm{d}(x)$ 是 9 的倍數，當且僅當 $9 \mid 2x$。由於 $\gcd(2,9) = 1$，$9 \mid 2x$ 當且僅當 $9 \mid x$。這樣便一次過證明了兩個方向。 ■

上下界。假設 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$，且 x 有 n 位數字。每個數字最多是 9，所以 $\mathrm{d}(x) \le 9n$，而 $x = 44\,\mathrm{d}(x) \le 396n$。另外，一個 n 位數的首位數字 $a_{n-1} \ge 1$，所以 $x \ge 10^{n-1}$。合起來得

$$10^{n-1} \le x \le 396n.$$

當 $n = 5$ 時，這需要 $10\,000 \le 1980$，並不成立。此外，若對某個 $n \ge 5$ 有 $10^{n-1} > 396n$，則 $10^n = 10 \cdot 10^{n-1} > 3960n \ge 396(n+1)$，所以由歸納法（induction）可知，不等式 $10^{n-1} \le 396n$ 對每個 $n \ge 5$ 都不成立。因此 $n \le 4$。 ■

> ? **想一想** 怎樣才能把搜尋範圍由 9999 以內的所有數，縮減到只剩幾個？

利用剛剛證明的等價關係。若 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$，則 $x - 44\,\mathrm{d}(x) = 0$，這是 9 的倍數，所以 $9 \mid x$。於是 $9 \mid 44\,\mathrm{d}(x)$，而由於 $\gcd(44,9) = 1$，這迫使 $9 \mid \mathrm{d}(x)$。因此 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$ 是 $44 \times 9 = 396$ 的倍數。

求解。由於 $n \le 4$，我們有 $x \le 396 \times 4 = 1584$，所以 x 是 396, 792, 1188, 1584 其中之一。它們的數字和全都是 18，所以在每種情況下 $44\,\mathrm{d}(x) = 792$。唯一符合的是

$$x = 792, \qquad \mathrm{d}(792) = 18, \quad 44 \times 18 = 792.$$

每一個解都在這四個候選數之中，而只有 792 符合，所以再沒有其他值。 ■

第 (iii) 部分

記 $y = \mathrm{d}(x)$ 及 $z = \mathrm{d}(y)$，於是方程為 $x = 107z$，且 $z = x/107 > 0$。

整除性。由第 (i) 部分，$x \equiv y \equiv z \pmod 9$。所以

$$0 = x - 107z \equiv z - 107z = -106z \pmod 9.$$

由於 $106 = 99 + 7$，所以 $9 \mid 7z$；又因 $\gcd(7,9) = 1$，得 $9 \mid z$。

大小。第 (i) 部分亦給出：對任何正整數 m，$\mathrm{d}(m) \le m$。所以若 x 有 n 位數字，則 $z = \mathrm{d}(y) \le y \le 9n$，以及

$$10^{n-1} \le x = 107z \le 963n.$$

當 $n = 5$ 時，這需要 $10\,000 \le 4815$，並不成立。用與第 (ii) 部分相同的歸納法（現在是 $10^n > 9630n \ge 963(n+1)$）可證明它對所有 $n \ge 5$ 都不成立，所以 $n \le 4$。

> ? **想一想** 上界 $z \le 36$ 仍然留下好幾個 9 的倍數。可以做得更好嗎？

可以，方法是再取一次數字和。由於 $n \le 4$，$y = \mathrm{d}(x) \le 36$。在 $1, 2, \ldots, 36$ 之中，最大的數字和是 $\mathrm{d}(29) = 11$，因為小於 37 的兩位數十位數字最多是 3，而十位數字為 3 時

個位數字最多是 6（數字和最多是 9），至於十位數字為 2 時則可以有 $2+9=11$。所以 $1 \le z \le 11$，而 z 是 9 的倍數。因此 $z=9$，以及

$$x = 107 \times 9 = 963.$$

驗證：$\mathrm{d}(963) = 18$，$\mathrm{d}(18) = 9$，而 $107 \times 9 = 963$。所以 $x = 963$ 滿足方程。任何解都必須有 $z = 9$，因此 $x = 963$，所以再沒有其他值。 ■

驗算

- 抽樣驗算第 (i) 部分：$249 - 15 = 234 = 9 \times 26$。
- 用電腦搜尋所有 $x < 10^6$，發現 792 是 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$ 的唯一解，而 963 是 $x = 107\,\mathrm{d}(\mathrm{d}(x))$ 的唯一解，與上述的上下界一致。
- 留意 $792 = 44 \times 18$ 及 $963 = 107 \times 9$：兩者都是 9 的倍數，正如整除性論證所要求的。

常見錯誤

- 在第 (ii) 部分只得出 x 是 9 的倍數。更強的事實是 $\mathrm{d}(x)$ 也是 9 的倍數，因而 $396 \mid x$，正是這一點令搜尋變得簡短。
- 只檢查了 $n = 5$ 便斷言 $n \le 4$。你需要說明為何對所有更大的 n，10^{n-1} 都一直大於 $396n$；歸納法（或者觀察到左邊每次增大 10 倍，而右邊最多只增大 $\frac{6}{5}$ 倍）正好提供了理由。
- 在第 (iii) 部分忘記了 $z > 0$，而正是這一點排除了 $z = 0$。

STEP 之外

$x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$ 這個事實，正是「棄九法」（casting out nines）背後的原理，那是一種古老的驗算方法。這是在環（ring）$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ 中運算的第一個例子，在這個環裡 10 的表現就像 1；同樣的想法配合 $10 \equiv -1$，便得出判斷能否被 11 整除的交錯和檢驗法。把一個數與其各位數字的函數混在一起的方程，通常都正如這裡般求解：用同餘縮減可能性，再用增長估計令候選名單變得有限。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是一本很好的同餘入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。