詳細解答

STEP II 2020，第 4 題

純數學 • 三角不等式

STEP II 2020，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

一切都建基於三角不等式（triangle inequality）：每條邊都嚴格短於另外兩條邊之和。事實上，只需檢查一條不等式，就是關於最長邊的那一條，因為另外兩條會自動成立。至於逆命題（converse），可以用圓規把三角形畫出來：先畫下一條邊，再從它的兩個端點各畫一個圓。

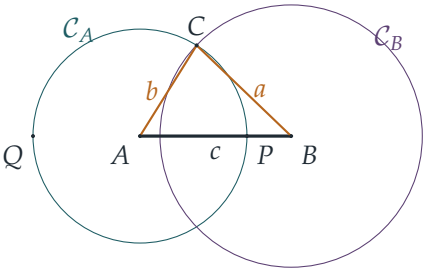
解答

第 (i) 部分

把頂點記為 A、B、C，其中 $BC = a$、$CA = b$、$AB = c$。直線段 AB 是由 A 到 B 的最短路徑，所以長度為 $b + a$ 的路徑 $A \to C \to B$ 至少是 c。它不可能等於 c：這只會在 C 位於線段 AB 上時發生，而那時根本沒有三角形。因此 $c < a + b$。對另外兩對頂點用同樣的論證，便得到 $a < b + c$ 及 $b < a + c$。

第 (ii) 部分

畫一條長度為 c 的線段 AB。以 A 為圓心、b 為半徑畫圓 $\mathcal{C}_A$，再以 B 為圓心、a 為半徑畫圓 $\mathcal{C}_B$。若兩圓相交於直線 AB 以外的一點 C，則 ABC 是一個三角形，且 $CA = b$、$CB = a$、$AB = c$。



為甚麼兩圓必定相交？設 P 和 Q 為 $\mathcal{C}_A$ 與直線 AB 的交點，其中 P 與 B 位於 A 的同一側。那麼

$$PB = |c - b|, \qquad QB = c + b.$$

由於 $c - b < a$ 和 $b - c < a$ 正是已知不等式中的兩條，所以 $|c - b| < a$；而 $c + b > a$ 就是第三條。因此，當一點沿 $\mathcal{C}_A$ 的上半圓由 P 移動到 Q 時，它與 B 的距離會連續（continuously）地由一個小於 a 的值變成一個大於 a 的值，所以在某處必定等於 a。這一點同時位於兩個圓上，而且不在直線 AB 上，因為 $\mathcal{C}_A$ 在該直線上的點只有 P 和 Q，而它們與 B 的距離都不是 a。這就是所求的點 C，所以邊長為 a、b、c 的三角形存在。

第 (iii) 部分

第 (i) 和第 (ii) 部分合起來說明：三個正數是某三角形的三邊，當且僅當每一個都小於另外兩個之和。記三者中最大的為 ℓ。若 ℓ 小於另外兩個之和，則另外兩條不等式立即成立，因為較小的每個數都不超過 ℓ，而餘下的那個數是正數。所以我們只需檢驗最長的長度。

(A) 必然成立。 三個長度都是正數。利用 $c < a + b$，

$$c + 1 < a + b + 1 < (a + 1) + (b + 1),$$

另外兩條不等式同理可得。

(B) 有時成立，但並非必然。 對於等邊三角形（equilateral triangle），三個長度是 $1, 1, 1$，確實能組成三角形。但取 $a = b = 1$ 及 $c = \frac{1}{10}$，由於 $1 < 1 + \frac{1}{10}$，這是一個真正的三角形。三個長度變成 1、10、$\frac{1}{10}$，而 $10 > 1 + \frac{1}{10}$，所以不可能組成三角形。

(C) 永不成立。 三個長度關於 a、b、c 對稱（symmetric），所以可以適當標記，使 $a \geq b \geq c$。那麼

$$|c - a| = a - c = (a - b) + (b - c) = |a - b| + |b - c|.$$

最大的長度等於另外兩個之和，所以嚴格不等式不成立。（若 a, b, c 中有兩個相等，則其中一個長度為 0，同樣不成立。）

(D) 必然成立。 把 a、b、c 中任意兩個互換，集合 $\{a^2+bc,\ b^2+ca,\ c^2+ab\}$ 都不變。（例如互換 a 和 b，得到 b^2+ac、a^2+cb、c^2+ba。）所以只需對每個三角形證明三條不等式中的一條，例如 $a^2+bc<(b^2+ca)+(c^2+ab)$。兩者之差為

$$\begin{aligned}(b^2+ca)+(c^2+ab)-(a^2+bc) &= (b^2-bc+c^2)+a(b+c)-a^2\\ &= (b-\tfrac{1}{2}c)^2+\tfrac{3}{4}c^2+a(b+c-a).\end{aligned}$$

由於 $c>0$，第一個括號是正數；又由於 $a>0$ 且 $a<b+c$，所以 $a(b+c-a)>0$。因此兩者之差為正數。另外兩條不等式經重新標記即可得出，而三個長度顯然都是正數，所以它們必然能組成三角形。

第 (iv) 部分

a、b、c 的角色可以互換，所以可以適當標記，使 $a\geq b\geq c$。$f(a)$、$f(b)$、$f(c)$ 三者都是正數。由於 f 是遞增（increasing）函數，$f(a)\geq f(b)\geq f(c)$，所以根據第 (iii) 部分開首的說明，我們只需證明

$$f(a)<f(b)+f(c).$$

? **想一想** 關於 $f(x)/x$ 的條件，怎樣幫助我們比較 $f(a)$ 與 $f(b)+f(c)$？

它讓我們可以用 $f(a)$ 的倍數，從下方為 $f(b)$ 和 $f(c)$ 定界。由於 $f(x)/x$ 隨 x 增大而遞減，且 $a\geq b$，

$$\frac{f(b)}{b}\geq\frac{f(a)}{a},\qquad\text{所以}\qquad f(b)\geq\frac{b}{a}f(a),$$

而等號只在 $b=a$ 時才可能成立。同理 $f(c)\geq\frac{c}{a}f(a)$。相加，得

$$f(b)+f(c)\ \geq\ \frac{b+c}{a}f(a)\ >\ f(a),$$

其中最後一步用到 $b+c>a$（由三角形得出）及 $f(a)>0$。所以三個新長度中最大的一個小於另外兩個之和，因此 $f(a)$、$f(b)$、$f(c)$ 是某三角形的三邊。

驗算

- 對於 (D)，試取 $a=2$、$b=3$、$c=4$：三個長度是 16、17、22，而 $22<16+17$。把恆等式重新標記以配合最長的長度 c^2+ab，可預測差值為 $(a^2-ab+b^2)+c(a+b-c)=(4-6+9)+4\cdot1=11$，而事實上 $16+17-22=11$。
- 對於 (C)，三角形 $3,4,5$ 給出 $1,1,2$：正如預測，是一個退化成直線的「扁平」三角形。
- 用電腦對 200 000 個隨機三角形進行檢驗，證實了 (A)、(D) 和 (C)（必然、必然、永不），發現 (B) 對其中約 40% 成立，並證實第 (iv) 部分對 $f(x)=\sqrt{x}$、$\ln(1+x)$、$x/(1+x)$、$x^{0.3}$ 及 $1-\mathrm{e}^{-x}$ 成立。

常見錯誤

- 只測試了一個三角形，便回答 (B) 是「永不」或「必然」：要回答「有時」，需要每種情況各舉一個例子。
- 在 (D) 中只檢查了一條不等式，卻沒有解釋為何另外兩條也成立：能夠支持這一點的，是對稱性（或關於最長邊的說明）。
- 在 (iv) 中，當 a 可能等於 b 時寫出 $f(a)/a < f(b)/b$；此時不等式應為 $\leq$，而嚴格不等號必須來自 $b + c > a$。

STEP 之外

三角不等式是度量（metric）的三條公理（axioms）之一；度量是距離的抽象概念，是大學一年級分析（analysis）和拓撲學（topology）的核心。第 (iv) 部分在那裏是一個經典結果：若 d 是度量，而 f 是遞增函數，且 $f(0) = 0$、$f(x)/x$ 遞減，則 $f \circ d$ 也是度量；這就是為甚麼 $d/(1+d)$ 是構造有界（bounded）度量的標準方法。Bartle 和 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《實分析導論》）是接觸這些概念的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。