詳細解答

STEP II 2020，第 3 題

純數學 • 對數凹數列

STEP II 2020，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2020 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

關鍵思路

性質 L 表示每個比值 u_{r+1}/u_r 都不大於前一個比值，所以數列一旦停止上升，就不可能再次上升。這正是單峯性（unimodality）。在第 (ii) 部分，遞推關係（recurrence）的輔助方程（auxiliary equation）有重根（repeated root）α，而組合 $u_r - \alpha u_{r-1}$ 把它化為一個簡單的等比數列（geometric sequence）。其餘一切都由這一個代換推出。

解答

第 (i) 部分

假設數列具有性質 L，且 $u_{r-1} \geq u_r$，其中 $2 \leq r \leq n-1$。由於 $u_{r-1} > 0$，我們可以把性質 L 兩邊除以它：

$$u_{r+1} \leq \frac{u_r^2}{u_{r-1}} = u_r \cdot \frac{u_r}{u_{r-1}} \leq u_r,$$

最後一步用到 $u_r/u_{r-1} \leq 1$ 及 $u_r > 0$。因此 $u_{r-1} \geq u_r \implies u_r \geq u_{r+1}$。

現在考慮任何具有性質 L 的數列。若 $u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n$，則它是單峯的，且 $k = n$。否則，存在第一個指標 k 使得 $u_k > u_{k+1}$（故 $k \leq n-1$）。由 k 的選取，

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_k.$$

由於 $u_k \geq u_{k+1}$，剛才證明的蘊涵（取 $r = k+1$）給出 $u_{k+1} \geq u_{k+2}$；再取 $r = k+2$ 應用一次，得 $u_{k+2} \geq u_{k+3}$，如此以歸納法（induction）一直推至 $u_{n-1} \geq u_n$。因此 $u_k \geq u_{k+1} \geq \cdots \geq u_n$，數列是單峯的。

第 (ii) 部分

對 $2 \le r \le n$，記 $v_r = u_r - \alpha u_{r-1}$。對 $3 \le r \le n$，遞推關係給出

$$v_r = 2\alpha u_{r-1} - \alpha^2 u_{r-2} - \alpha u_{r-1} = \alpha\left(u_{r-1} - \alpha u_{r-2}\right) = \alpha v_{r-1}.$$

所以 (v_r) 是公比為 α 的等比數列，且 $v_r = \alpha^{r-2} v_2$，即

$$u_r - \alpha u_{r-1} = \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) \qquad (2 \le r \le n).$$

（當 $r = 2$ 時此式顯然成立，而 r 每增加一，兩邊都乘以 α。）

對 $2 \le r \le n-1$，我們有 $3 \le r+1 \le n$，因此可以代入 $u_{r+1} = 2\alpha u_r - \alpha^2 u_{r-1}$：

$$u_r^2 - u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - 2\alpha u_r u_{r-1} + \alpha^2 u_{r-1}^2 = (u_r - \alpha u_{r-1})^2.$$

正數且單峯。 假設 $u_2 > \alpha u_1 > 0$。由於 $\alpha > 0$，這給出 $u_1 > 0$，而 $u_2 > 0$ 亦成立。至於之後的項，第一個恆等式給出

$$u_r = \alpha u_{r-1} + \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) > \alpha u_{r-1},$$

因為 $\alpha^{r-2} > 0$ 及 $u_2 - \alpha u_1 > 0$。所以若 $u_{r-1} > 0$，則 $u_r > 0$；由歸納法，每一項都是正數。現在第二個恆等式給出：對 $2 \le r \le n-1$，$u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - (u_r - \alpha u_{r-1})^2 \le u_r^2$。這就是正項數列的性質 L，所以由第 (i) 部分，數列是單峯的。

$u_1 = 1$、$u_2 = 2$ 的情況。 設 $w_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$。則 $w_1 = 1 = u_1$ 及 $w_2 = 2 = u_2$。在這些初始值下，第一個恆等式寫成

$$u_r = \alpha u_{r-1} + (2-\alpha)\alpha^{r-2}.$$

假設對某個滿足 $3 \le r \le n$ 的 r，有 $u_{r-1} = w_{r-1}$。那麼

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha\left[(3-r)\alpha^{r-2} + 2(r-2)\alpha^{r-3}\right] + 2\alpha^{r-2} - \alpha^{r-1} \\ &= (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2} = w_r, \end{aligned}$$

所以由歸納法，對 $1 \le r \le n$，$u_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$。（我們同樣可以用原來的遞推關係進行兩步歸納；但一階的形式較快捷。）

$\alpha = 1 - \frac{1}{N}$ 時的最大值。 此時 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$，所以 $u_2 = 2 > \alpha = \alpha u_1 > 0$，由上面的推導，數列是正數且單峯的。要找出峯值，可考察相鄰項之差。由 $u_{r+1} = \alpha u_r + (2-\alpha)\alpha^{r-1}$ 及 $\alpha - 1 = -\frac{1}{N}$，

$$u_{r+1} - u_r = (2-\alpha)\alpha^{r-1} - \frac{u_r}{N} = \frac{\alpha^{r-2}}{N}\Big[N\alpha(2-\alpha) - (2-r)\alpha - 2(r-1)\Big].$$

由於 $N\alpha = N-1$ 及 $2-\alpha = \frac{N+1}{N}$，所以 $N\alpha(2-\alpha) = N - \frac{1}{N}$，而 $(2-r)\alpha = 2-r-\frac{2-r}{N}$。方括號化簡為

$$N - \frac{1}{N} - 2 + r + \frac{2-r}{N} - 2r + 2 = (N-r) - \frac{r-1}{N} = \frac{N^2+1-r(N+1)}{N},$$

因此

$$u_{r+1} - u_r = \frac{\alpha^{r-2}}{N^2}\Big(N^2+1-r(N+1)\Big).$$

? **想一想** $N^2+1-r(N+1)$ 究竟在哪裏變號？它有可能等於零嗎？

它只在 $r = \dfrac{N^2+1}{N+1} = N-1+\dfrac{2}{N+1}$ 時為零。由於 $N \geq 2$，我們有 $0 < \frac{2}{N+1} < 1$，所以這個值嚴格介乎整數 $N-1$ 與 N 之間。由於 $\alpha^{r-2} > 0$：

- 當 $r \leq N-1$ 時，$u_{r+1} > u_r$；
- 當 $r \geq N$ 時，$u_{r+1} < u_r$。

因此 $u_1 < u_2 < \cdots < u_N$ 且 $u_N > u_{N+1} > \cdots > u_n$。由於 $N \leq n$，項 u_N 存在，而 u_r 在 $r = N$ 時取最大值（嚴格最大，沒有並列）。

驗算

取 $N = 5$，則 $\alpha = \frac{4}{5}$。遞推關係給出 1, 2, 2.56, 2.816, 2.8672, 2.78528, 2.62144, ...，在 $r = 5$ 升至峯值，之後下降，與所述相符。差的公式預測 $u_6 - u_5 = \alpha^3(26-30)/25 = -0.08192$，結果吻合。此外，$u_3 = 2\alpha \cdot 2 - \alpha^2 = 2.56$ 與閉合形式 $-\alpha^2 + 4\alpha$ 一致。這些恆等式及峯值位置亦已用電腦以精確算術，就多組 α、u_1、u_2 的值及 N 直至 29 驗證過。

常見錯誤

- 在第 (i) 部分除以 u_{r-1} 時，沒有指出它是正數。對於含負項的數列，這個論證並不成立。
- 在第 (ii) 部分引用第 (i) 部分之前，忘記證明各項為正數，而第 (i) 部分需要正性。
- 只證明 $u_{N+1} < u_N$ 及 $u_{N-1} < u_N$。由於單峯性，這已經足夠，但你必須說明這一點；較簡潔的做法是找出每一個差的正負號。

STEP 之外

性質 L 稱為對數凹性（log-concavity）：$\ln u_r$ 是 r 的凹函數（concave function）。對數凹數列在組合數學和概率中隨處可見。二項式係數（binomial coefficients）$\binom{n}{r}$ 就是一個例子，而牛頓（Newton）不等式指出，只有實根的多項式，其係數是對數凹的。第 (ii) 部分的遞推關係是一個帶重根的線性遞推關係，這就是為甚麼解具有 $(A+Br)\alpha^r$ 的形式，正如微分方程（differential equations）出現重根時會得到 $(A+Bx)\mathrm{e}^{\alpha x}$。關於這種類比在微分方程方面的內容，可參閱 Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）；至於同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等數學問題》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。